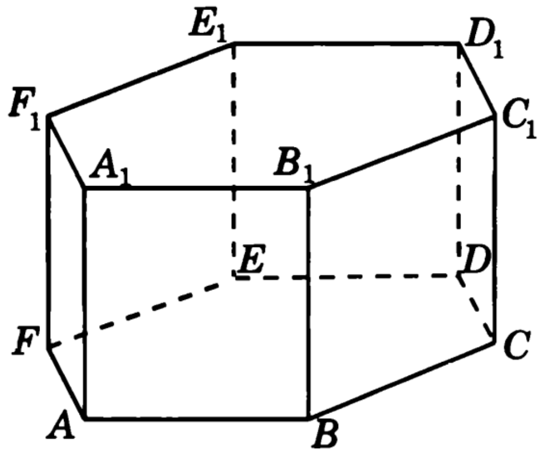
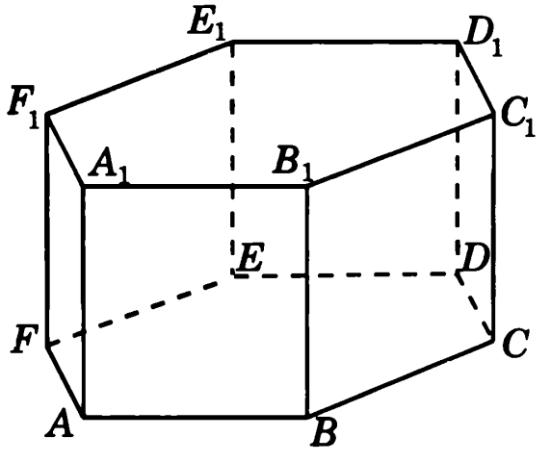
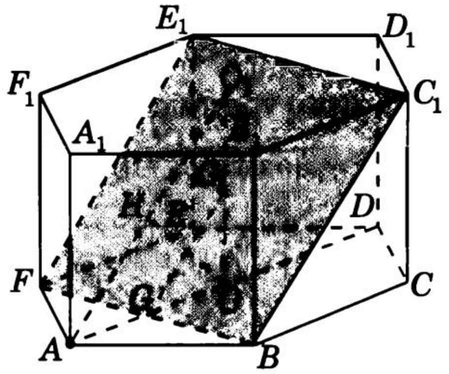
| | |
|---|---|
| **11 класс**<br>**выходной**<br>**Вариант 2.** | |
| 1 | Найдите наименьшее целое положительное **x** из области определения функции:<br>$y = 3\log_3 \frac{x^2+3x-10}{1+x^2} + 3^x$ |
| 2 | Решите уравнение:<br>$\sqrt{x+2} + 4\sqrt{x+3} = 5\sqrt[4]{(x+2)(x+3)}$ |
| 3 | Цену товара повысили на 10%, затем новую цену повысили еще на 5%, и, наконец, после пересчета, произвели снижение на 10%. На сколько процентов всего изменилась первоначальная цена товара? |
| 4 | Решите уравнение:<br>$24\cos 2x - 3\cos x = 3\cos 3x - 14\cos^2 2x$ |
| 5 | Решите неравенство:<br>$\frac{(4x-x^2-3)\cdot\sqrt{3-x}}{(3x-x^2-3)\cdot \lg^2 x} \geq 0$ |
| 6 | В первой урне находятся 1 белый и 9 черных шаров, а во второй - 1 черный и 5 белых шаров. Из каждой урны по схеме случайного выбора без возвращения удалили по одному шару, а оставшиеся шары ссыпали в третью урну. Найти вероятность того, что шар, вынутый из третьей урны, окажется белым. |
| 7 | В правильной шестиугольной призме $ABC\ldots E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости $BFE_1$.<br><br> |
| 8 | Найдите все значения параметра а, при которых в множестве решений неравенства $x(x-2a-10)+a^2 < \frac{10a^2}{x} - 20a$ можно расположить два отрезка длиной 1 и длиной 8, которые не имеют общих точек. |

| | |
|---|---|
| | **11 класс**<br>**выходной**<br>**Вариант 2 (решения).** |
| 1 | Найдите наименьшее целое положительное **x** из области определения функции:<br>$y = 3\log_3 \frac{x^2+3x-10}{1+x^2} + 3^x$<br>Решение.<br>$\begin{cases}\frac{x^2+3x-10}{1+x^2} > 0;\end{cases}$ (x+5)(x-2)>0;<br>$x = 3$ |
| 2 | Решите уравнение:<br>$\sqrt{x+2} + 4\sqrt{x+3} = 5\sqrt[4]{(x+2)(x+3)}$<br>Решение.<br>$x \geq -2$<br>$\begin{cases}\sqrt[4]{x+2} = a\\ \sqrt[4]{x+3} = b\end{cases} => a^2 + 4b^2 = 4ab;$<br>$a^2 - 5ab + 4b^2 = 0; \left[\begin{array}{l} a = 4b \\ a = b \end{array}\right.;$<br>$\left[\begin{array}{l}\sqrt[4]{x+2} = 4\sqrt[4]{x+3} \\ \sqrt[4]{x+2} = \sqrt[4]{x+3}\end{array}\right.; x = -\frac{586}{195}$ => *решений нет* |
| 3 | Цену товара повысили на 10%, затем новую цену повысили еще на 5%, и, наконец, после пересчета, произвели снижение на 10%. На сколько процентов всего изменилась первоначальная цена товара?<br>Решение.<br>$1{,}1 \cdot 1{,}05 \cdot 0{,}9 \cdot \mathrm{a} = 1{,}0395\mathrm{a}$<br>повысилась на 3,95% |
| 4 | Решите уравнение:<br>$24\cos 2x - 3\cos x = 3\cos 3x - 14\cos^2 2x$<br>Решение.<br>$2cos2x(12 + 7cos2x) - 6cos2xcosx = 0;$<br>$2cos2x(12 - 7cos2x - 3cosx) = 0;$<br>$cos2x = 0$ *и* $12 + 7cos2x - 3cosx = 0;$<br>$x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$ *и* $14cos^2x - 3cosx + 5 = 0$<br>Отв. $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$ |
| 5 | Решите неравенство:<br>$\frac{(4x - x^2 - 3)\cdot\sqrt{3-x}}{(3x - x^2 - 3)\cdot \lg^2 x} \geq 0$<br>*Решение:* т.к. $\sqrt{3-x} \geq 0$, $3x-x^2-3<0$ и $\lg^2 x \geq 0$,то |

| | |
|---|---|
| | $\begin{cases} x \le 3 \\ lg^2 x \neq 0 \\ x > 0 \\ (x-3)(x-1) \ge 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x \le 3 \\ lg^2 x \neq 0 \\ x > 0 \\ x = 3 \end{cases}$ => $0 < x < 1$ и $x = 3$ |
| 6 | В первой урне находятся 1 белый и 9 черных шаров, а во второй - 1 черный и 5 белых шаров. Из каждой урны по схеме случайного выбора без возвращения удалили по одному шару, а оставшиеся шары ссыпали в третью урну. Найти вероятность того, что шар, вынутый из третьей урны, окажется белым.<br>*Решение.*<br>Введем полную группу гипотез:<br>H1 = (из первой урны вытащили белый шар, из второй вытащили черный шар; тогда в третьей урне будет 5 белых и 9 черных),<br>H2 = (из первой урны вытащили белый шар, из второй вытащили белый шар; тогда в третьей урне будет 4 белых и 10 черных),<br>H3 = (из первой урны вытащили черный шар, из второй вытащили черный шар; тогда в третьей урне будет 6 белых и 8 черных),<br>H4 = (из первой урны вытащили черный шар, из второй вытащили белый шар; тогда в третьей урне будет 5 белых и 9 черных).<br>Найдем вероятности гипотез по классическому определению вероятности:<br>P(H1) = 1/(1+9) * 1/(1+5) = 1/60<br>P(H2) = 1/(1+9) * 5/(1+5) = 5/60<br>P(H3) = 9/(1+9) * 1/(1+5) = 9/60<br>P(H4) = 9/(1+9) * 5/(1+5) = 45/60<br>Введем событие A = (из третьей урны вытащили белый шар).<br>P(A\|H1) = P(A\|H4) =5/(5+9)<br>P(A\|H2) = 4/(4+10)<br>P(A\|H3) = 6/(6+8)<br><br>Вероятность события A найдем по формуле полной вероятности:<br>P(A)=P(A\|H1)P(H1)+P(A\|H2)P(H2)+P(A\|H3)P(H3)+P(A\|H4)P(H4)<br>P(A)=5/14*1/60+4/14*5/60+6/14*9/60+5/14*45/60=5/840+20/840+54/840+225/840=304/840=0.3619<br>Ответ: 0.3619 |
| 7 | В правильной шестиугольной призме $ABC\ldots E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости $BFE_1$. |




Решение. Пусть O и $O_1$ – центры оснований призмы. Прямая $AO_1$ параллельна плоскости $BFE_1$, и, следовательно, расстояние от точки A до плоскости $BFE_1$ равно расстоянию от прямой $AO_1$ до плоскости $BFE_1$.




Плоскость $AOO_1$ перпендикулярна плоскости $BFE_1$ и, следовательно, прямой $AO_1$ до плоскости $BFE_1$ равно расстоянию от прямой $AO_1$ до линии пересечения $GG_1$ плоскостей $AOO_1$ и $BFE_1$. Треугольник $AOO_1$ прямоугольный, $AO=OO_1=1$, $GG_1$ – его средняя линия. Значит, расстояние между прямыми $AO_1$ и $GG_1$ равно половине высоты OH треугольника AOO1, то есть $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

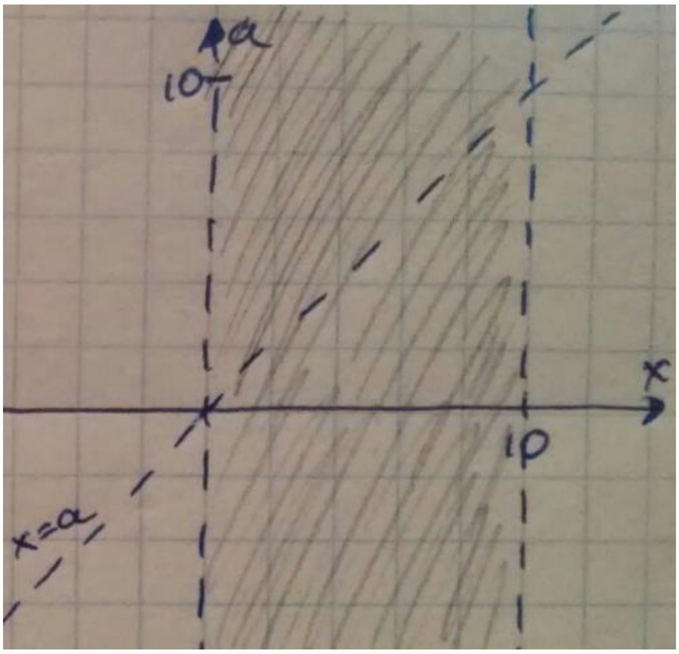
8 Найдите все значения параметра а, при которых в множестве решений неравенства $x(x-2a-10)+a^2<\frac{10a^2}{x}-20a$ можно расположить два отрезка длиной 1 и длиной 8, которые не имеют общих точек.

Решение: Выполним равносильные преобразования

$$x(x-2a-10)+a^2<\frac{10a^2}{x}-20a \Leftrightarrow (x^2-2ax+a^2)-\left(10x-20a+\frac{10a^2}{x}\right)<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2-\frac{10}{x}(x-a)^2<0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}(x-a)^2(x-10)<0.$$

Далее решение может быть получено как графически, так и аналитически (метод интервалов + разбор случаев). Мы решим графически.
Построим в плоскости xOa обнуляющие множества $x=0, x=a, x=10$.
Методом областей расставим знаки (границы не включены).




По картинке видим, что, если $a \in (-\infty;0] \cup [10;\infty)$, то множество решений является интервалом (0;10), в котором такие отрезки расположить можно. Если $a \in (0;10)$, то множество решений $x \in (0;a) \cup (a;10)$. Если $a \in (0;1)$ или $a \in (9;10)$, то отрезки вместятся по одну сторону от прямой x=a, если $a \in (1;2)$ или $a \in (8;9)$, то отрезки вместятся по разные стороны от прямой x=a. В остальных случаях указанные отрезки разместить в множестве решений нельзя. Объединяя полученные промежутки, получим ответ.
Ответ: при $a \in (-\infty;1) \cup (1;2) \cup (8;9) \cup (9;\infty)$.