Светимость, поток излучения и звёздные величины

Преподаватель: Сорокина Василиса Ивановна

Задачи

Задача 1. (Всеросс, МЭ, 2010, 9) 30 октября 2021 года планета Венера оказалась в наибольшей восточной элонгации в небе Земли, а сама Земля — в наибольшей западной элонгации в небе Сатурна. Определите угловое расстояние между Венерой и Сатурном при наблюдении с Земли в этот день. Орбиты всех планет считать круговыми и лежащими в одной плоскости.

Задача 2. Какая звезда ярче: восьмой звёздной величины или десятой звёздной величины? Объясните, почему.

Задача 3. (Всеросс, МЭ, 2023, 10–11) Светимость Солнца составляет $3{,}828 \cdot 10^{26}$ Вт. Его энергия питает множество процессов и обеспечивает температуру, необходимую для существования жизни на Земле. Рассчитайте, сколько энергии поступает на поверхность Земли за сутки.

Задача 4. (Всеросс, МЭ, 2023, 10–11) Расстояние до Сириуса (2,7 пк) уменьшается на 8 км ежесекундно. Через сколько лет блеск Сириуса возрастёт вдвое?

Задача 5. (Всеросс, РЭ, 2024, 9) Вокруг звезды с радиусом 0,64 радиуса Солнца и температурой 3850 К по круговой орбите с радиусом 0,3 а.е. обращается кубический космический аппарат, одна грань которого представляет собой квадратную солнечную батарею с длиной стороны 40 см, её КПД равен 15%. Аппарат должен был двигаться так, чтобы батарея всегда располагалась перпендикулярно направлению на звезду, обеспечивая максимальное энерговыделение. Однако в некоторый момент времени система ориентирования аппарата сбилась. При каком максимальном угле поворота оси батареи относительно правильного положения аппарат ещё сможет функционировать, если для работы его приборов необходима мощность 20 Вт?

Задача 6. (Всеросс, РЭ, 2024, 11) Два человека решили отправиться в кругосветное путешествие. Они начали его из одной точки на экваторе Земли. Первый путешественник отправился вдоль экватора, а второй вначале сместился вдоль меридиана до некоторой параллели с ненулевой широтой, сделал оборот вокруг Земли по ней и вернулся по тому же меридиану в начальную точку путешествия. Там он встретился с первым путешественником, завершившим свой один оборот в тот же момент. Определите широту, до которой сместился второй путешественник. Считайте, что скорость путешественников по поверхности Земли постоянна и одинакова, Землю считать сферической.

Задача 7. Чему равно отношение радиусов звёзд в системе затемнённо-переменной типа Алголя, если затмение центральное, спутник тёмный, а отношение блеска в максимуме и минимуме равно n?

Задача 8. Найти солнечную постоянную — сколько энергии приходит на 1 м^2 на заданном расстоянии от звезды. Вывести общую формулу и привести значения для наиболее известных звёзд.

Решения

Задача 1. Условие. (Всеросс, МЭ, 2010, 9) 30 октября 2021 года планета Венера оказалась в наибольшей восточной элонгации в небе Земли, а сама Земля — в наибольшей западной элонгации в небе Сатурна. Определите угловое расстояние между Венерой и Сатурном при наблюдении с Земли в этот день. Орбиты всех планет считать круговыми и лежащими в одной плоскости.

Решение. Принимаем средние радиусы орбит: $R_{\text{В}} \approx 0{,}723$ а.е., $R_{\text{З}} = 1{,}000$ а.е., $R_{\text{С}} \approx 9{,}54$ а.е.

1. **Венера в наибольшей элонгации на небе Земли.** Луч зрения Земля–Венера касается орбиты Венеры, следовательно, угол при Венере прямой: $\angle\text{SVE} = 90^\circ$. Угол восточной элонгации Венеры $\psi_{\text{В}} = \angle\text{SEV}$:

$$\sin\psi_{\text{В}} = \frac{R_{\text{В}}}{R_{\text{З}}} = 0{,}723 \implies \psi_{\text{В}} \approx 46{,}3^\circ.$$

   Венера находится на $46{,}3^\circ$ к востоку от Солнца.

2. **Земля в наибольшей элонгации на небе Сатурна.** Земля является внутренней планетой для Сатурна. Условие максимальной элонгации Земли означает, что луч зрения с Сатурна касается орбиты Земли, то есть угол при Земле прямой:

$$\angle\text{SESat} = 90^\circ.$$

   Следовательно, с точки зрения земного наблюдателя угол между Солнцем и Сатурном составляет ровно 90°. Поскольку элонгация Земли для Сатурна западная, Сатурн на земном небе располагается к востоку от Солнца (вечерняя видимость).

Оба светила (Венера и Сатурн) находятся по одну сторону от Солнца (к востоку от него). Угловое расстояние между ними на земном небе равно:

$$\theta = 90^\circ - \psi_{\text{В}} = 90^\circ - 46{,}3^\circ = 43{,}7^\circ \approx 44^\circ.$$

Ответ: $43{,}7^\circ$ (или $\approx 44^\circ$).

Задача 2. Условие. Какая звезда ярче: восьмой звёздной величины или десятой звёздной величины? Объясните, почему.

Решение. Ярче звезда восьмой звёздной величины (8^m). Шкала звёздных величин исторически построена инверсной: более ярким объектам приписывается меньшая величина (вплоть до отрицательных значений). По формуле Погсона отношение блеска (освещённостей) двух светил выражается как:

$$\frac{E_1}{E_2} = 10^{-0{,}4(m_1 - m_2)} = 10^{0{,}4(m_2 - m_1)}.$$

Для $\Delta m = 10 - 8 = 2$:

$$\frac{E_8}{E_{10}} = 10^{0{,}4\cdot 2} = 10^{0{,}8} \approx 6{,}31.$$

Звезда 8^m ярче звезды 10^m примерно в 6,3 раза.

Ответ: ярче звезда восьмой величины, примерно в 6,3 раза.

Задача 3. **Условие.** (Всеросс, МЭ, 2023, 10–11) Светимость Солнца составляет $3{,}828 \cdot 10^{26}$ Вт. Его энергия питает множество процессов и обеспечивает температуру, необходимую для существования жизни на Земле. Рассчитайте, сколько энергии поступает на поверхность Земли за сутки.

Решение.

1. На среднем расстоянии $r = 1$ а.е. $\approx 1{,}496 \cdot 10^{11}$ м плотность потока солнечной энергии (солнечная постоянная):

$$I_\odot = \frac{L_\odot}{4\pi r^2} = \frac{3{,}828 \cdot 10^{26}\ \text{Вт}}{4\pi \cdot (1{,}496 \cdot 10^{11}\ \text{м})^2} \approx 1361\ \text{Вт/м}^2.$$

2. Полная мощность излучения, перехватываемого Землёй, равна потоку через площадь её поперечного сечения $S_{\text{сеч}} = \pi R_3^2$ ($R_3 \approx 6{,}371 \cdot 10^6$ м):

$$P = I_\odot \cdot \pi R_3^2 = \frac{L_\odot R_3^2}{4r^2} \approx 1361 \cdot \pi \cdot (6{,}371 \cdot 10^6)^2 \approx 1{,}736 \cdot 10^{17}\ \text{Вт}.$$

3. За одни сутки ($\Delta t = 86\,400$ с) на верхнюю границу атмосферы Земли поступает:

$$E_0 = P \cdot \Delta t \approx 1{,}736 \cdot 10^{17}\ \text{Вт} \cdot 86\,400\ \text{с} \approx 1{,}50 \cdot 10^{22}\ \text{Дж}.$$

4. При учёте интегрального альбедо Земли ($A \approx 0{,}30$) часть энергии отражается обратно в космос, и непосредственно поглощается поверхностью:

$$E_{\text{погл}} = (1 - A)E_0 \approx 0{,}70 \cdot 1{,}50 \cdot 10^{22} \approx 1{,}05 \cdot 10^{22}\ \text{Дж}.$$

Ответ: на Землю поступает $\approx 1{,}50 \cdot 10^{22}$ Дж в сутки (с учётом отражения поверхностью поглощается $\approx 1{,}05 \cdot 10^{22}$ Дж).

Задача 4. **Условие.** (Всеросс, МЭ, 2023, 10–11) Расстояние до Сириуса (2,7 пк) уменьшается на 8 км ежесекундно. Через сколько лет блеск Сириуса возрастёт вдвое?

Решение. Блеск звезды E обратно пропорционален квадрату расстояния до неё: $E \propto \frac{1}{r^2}$. Чтобы блеск возрос в 2 раза ($E_2 = 2E_1$), расстояние должно уменьшиться до величины:

$$r_2 = \frac{r_1}{\sqrt{2}}.$$

Изменение расстояния:

$$\Delta r = r_1 - r_2 = r_1 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0{,}2929 \cdot r_1.$$

Переведём начальное расстояние в километры (1 пк $\approx 3{,}086 \cdot 10^{13}$ км):

$$r_1 = 2{,}7 \cdot 3{,}086 \cdot 10^{13}\ \text{км} \approx 8{,}332 \cdot 10^{13}\ \text{км}.$$

$$\Delta r = 0{,}2929 \cdot 8{,}332 \cdot 10^{13}\ \text{км} \approx 2{,}44 \cdot 10^{13}\ \text{км}.$$

Время сближения при лучевой скорости $v = 8$ км/с:

$$t = \frac{\Delta r}{v} = \frac{2{,}44 \cdot 10^{13}\ \text{км}}{8\ \text{км/с}} \approx 3{,}05 \cdot 10^{12}\ \text{с}.$$

Переведём в годы (1 год $\approx 3{,}156 \cdot 10^7$ с):

$$t = \frac{3{,}05 \cdot 10^{12}}{3{,}156 \cdot 10^7} \approx 96\,700\ \text{лет} \approx 9{,}7 \cdot 10^4\ \text{лет}.$$

Ответ: примерно через 97 000 лет.

Задача 5. Условие. (Всеросс, РЭ, 2024, 9) Вокруг звезды с радиусом 0,64 радиуса Солнца и температурой 3850 К по круговой орбите с радиусом 0,3 а.е. обращается кубический космический аппарат, одна грань которого представляет собой квадратную солнечную батарею с длиной стороны 40 см, её КПД равен 15%. Аппарат должен был двигаться так, чтобы батарея всегда располагалась перпендикулярно направлению на звезду, обеспечивая максимальное энерговыделение. Однако в некоторый момент времени система ориентирования аппарата сбилась. При каком максимальном угле поворота оси батареи относительно правильного положения аппарат ещё сможет функционировать, если для работы его приборов необходима мощность 20 Вт?

Решение.

1. Светимость звезды по закону Стефана–Больцмана:

$$L = 4\pi R_*^2 \sigma T^4,$$

где $R_* = 0{,}64 R_\odot = 0{,}64 \cdot 6{,}96 \cdot 10^8$ м $\approx 4{,}454 \cdot 10^8$ м, $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4), $T = 3850$ К.

$$L = 4\pi \cdot (4{,}454 \cdot 10^8)^2 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot (3850)^4 \approx 3{,}109 \cdot 10^{25} \text{ Вт}.$$

2. Плотность потока излучения на расстоянии $r = 0{,}3$ а.е. $= 0{,}3 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}$ м $= 4{,}488 \cdot 10^{10}$ м:

$$I = \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{3{,}109 \cdot 10^{25}}{4\pi \cdot (4{,}488 \cdot 10^{10})^2} \approx 1228 \text{ Вт/м}^2.$$

3. Площадь солнечной панели: $S = 0{,}40$ м $\times$ $0{,}40$ м $= 0{,}16$ м^2. При угле наклона θ нормали к направлению на звезду генерируемая электрическая мощность:

$$P(\theta) = I \cdot S \cdot \eta \cdot \cos\theta.$$

При идеальной ориентации ($\theta = 0^\circ$):

$$P_{\max} = 1228 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}15 \approx 29{,}47 \text{ Вт}.$$

4. Из условия работоспособности $P(\theta) \geq P_{\min} = 20$ Вт:

$$\cos\theta \geq \frac{P_{\min}}{P_{\max}} = \frac{20}{29{,}47} \approx 0{,}6787.$$

$$\theta \leq \arccos(0{,}6787) \approx 47{,}26^\circ \approx 47^\circ.$$

Ответ: максимальный угол поворота составляет приблизительно 47°.

Задача 6. Условие. (Всеросс, РЭ, 2024, 11) Два человека решили отправиться в кругосветное путешествие. Они начали его из одной точки на экваторе Земли. Первый путешественник отправился вдоль экватора, а второй вначале сместился вдоль меридиана до некоторой параллели с ненулевой широтой, сделал оборот вокруг Земли по ней и вернулся по тому же меридиану в начальную точку путешествия. Там он встретился с первым путешественником, завершившим свой один оборот в тот же момент. Определите широту, до которой сместился второй путешественник. Считайте, что скорость путешественников по поверхности Земли постоянна и одинакова, Землю считать сферической.

Решение. Пусть R — радиус Земли, а φ — искомая широта в радианах ($\varphi \in (0, \pi/2)$). Поскольку скорости путешественников одинаковы и завершили они путь одновременно, пройденные ими расстояния равны: $S_1 = S_2$.

1. Первый путешественник прошёл по экватору:

$$S_1 = 2\pi R.$$

2. Второй путешественник прошёл:

   - путь до параллели по меридиану: $R\varphi$;
   - полный оборот по параллели радиуса $r = R\cos\varphi$: $2\pi R\cos\varphi$;
   - обратный путь к экватору: $R\varphi$.

$$S_2 = 2R\varphi + 2\pi R\cos\varphi.$$

Приравнивая $S_1 = S_2$:

$$2\pi R = 2R\varphi + 2\pi R\cos\varphi \implies \pi = \varphi + \pi\cos\varphi.$$

Преобразуем к виду:

$$1 - \cos\varphi = \frac{\varphi}{\pi}.$$

Используем формулу половинного угла $1 - \cos\varphi = 2\sin^2(\varphi/2)$:

$$2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\varphi}{\pi}.$$

Решим трансцендентное уравнение численно для $\varphi \neq 0$:

- При $\varphi = 0{,}65$ рад: $1 - \cos(0{,}65) = 1 - 0{,}7961 = 0{,}2039$; $\dfrac{0{,}65}{\pi} \approx 0{,}2069$.
- При $\varphi = 0{,}66$ рад: $1 - \cos(0{,}66) = 1 - 0{,}78998 = 0{,}2100$; $\dfrac{0{,}66}{\pi} \approx 0{,}2101$.

Корень уравнения: $\varphi \approx 0{,}660$ рад.

Переведём радианы в градусы:

$$\varphi = 0{,}660 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 37{,}8^\circ = 37^\circ 49'.$$

Ответ: $\varphi \approx 37{,}8^\circ$ (или $\approx 37^\circ 49'$ северной или южной широты).

Задача 7. **Условие.** Чему равно отношение радиусов звёзд в системе затемнённо-переменной типа Алголя, если затмение центральное, спутник тёмный, а отношение блеска в максимуме и минимуме равно n?

Решение. Пусть R_1 — радиус яркой главной звезды, а R_2 — радиус тёмного спутника ($L_2 \approx 0$).

1. Вне затмения (максимум) видна вся главная звезда, блеск пропорционален её площади:

$$E_{\max} = k\pi R_1^2.$$

2. Во время центрального затмения тёмный спутник экранирует часть диска главной звезды.

- Если спутник меньше главной звезды ($R_2 \le R_1$), он полностью проецируется на её диск, перекрывая площадь πR_2^2. Оставшаяся площадь излучения равна $\pi(R_1^2 - R_2^2)$. Блеск в минимуме:

$$E_{\min} = k\pi(R_1^2 - R_2^2).$$

Отношение блеска:

$$n = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_2^2} = \frac{1}{1 - \left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^2}.$$

Отсюда:

$$1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = \frac{1}{n} \implies \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}.$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}, \quad \text{или} \quad \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

- Если $R_2 \ge R_1$, при центральном затмении спутник полностью затмевает звезду, блеск падает до нуля ($E_{\min} = 0$), что соответствует $n \to \infty$.

Ответ: отношение радиуса спутника к радиусу главной звезды равно $\dfrac{R_2}{R_1} = \sqrt{\dfrac{n-1}{n}}$ (или $\dfrac{R_1}{R_2} = \sqrt{\dfrac{n}{n-1}}$).

Задача 8. **Условие.** Найти солнечную постоянную — сколько энергии приходит на 1 м^2 на заданном расстоянии от звезды. Вывести общую формулу и привести значения для наиболее известных звёзд.

Решение.

1. **Общая формула.** Светимость звезды L — полная мощность её излучения во все стороны. Энергия распределяется сферически по площади сферы радиусом R (расстояние от звезды до планеты):

$$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2.$$

Тогда плотность потока излучения (звёздная постоянная I):

$$I = \frac{L}{4\pi R^2} \quad \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}\right].$$

2. **Солнце** на орбите Земли ($R = 1$ а.е. $\approx 1{,}496 \cdot 10^{11}$ м, $L_\odot \approx 3{,}828 \cdot 10^{26}$ Вт):

$$I_\odot = \frac{3{,}828 \cdot 10^{26}}{4\pi(1{,}496 \cdot 10^{11})^2} \approx 1361 \text{ Вт/м}^2.$$

3. **Сириус А** ($L \approx 25{,}4\, L_\odot$): на расстоянии 1 а.е. поток составлял бы

$$I_{\text{Сириус}} = 25{,}4 \cdot 1361 \text{ Вт/м}^2 \approx 34{,}6 \text{ кВт/м}^2.$$

4. **Вега** ($L \approx 40\, L_\odot$):

$$I_{\text{Вега}} = 40 \cdot 1361 \text{ Вт/м}^2 \approx 54{,}4 \text{ кВт/м}^2.$$

5. **Бетельгейзе** ($L \approx 100\,000\,L_\odot$):

$$I_{\text{Бетельгейзе}} = 100\,000 \cdot 1361 \text{ Вт/м}^2 \approx 1{,}36 \cdot 10^8 \text{ Вт/м}^2 = 136{,}1 \text{ МВт/м}^2.$$

6. **Проксима Центавра** ($L \approx 0{,}0017\,L_\odot$) — на расстоянии её обитаемой зоны $R \approx 0{,}0485$ а.е.:

$$I_{\text{Проксима}} = \frac{0{,}0017 \cdot 3{,}828 \cdot 10^{26}}{4\pi(0{,}0485 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11})^2} \approx 980 \text{ Вт/м}^2.$$

Ответ: $I = \dfrac{L}{4\pi R^2}$. Для Солнца на 1 а.е. $I_\odot \approx 1361$ Вт/м^2; Сириус A: $\approx 34{,}6$ кВт/м^2; Вега: $\approx 54{,}4$ кВт/м^2; Бетельгейзе: ≈ 136 МВт/м^2; Проксима Центавра в обитаемой зоне: ≈ 980 Вт/м^2.