Гравитация и космические скорости

Преподаватель: Сорокина Василиса Ивановна

Теоретическая шпаргалка

Закон всемирного тяготения:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad G \approx 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \text{м}^3/(\text{кг}\cdot\text{с}^2).$$

Ускорение свободного падения на поверхности планеты массой M и радиусом R:

$$g = \frac{GM}{R^2}.$$

Первая космическая скорость (круговая орбита у поверхности):

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{gR}.$$

Вторая космическая скорость (параболическая, уход на бесконечность):

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2}\, v_1.$$

Третий закон Кеплера:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{const}.$$

Для двух планет одной системы: $\dfrac{T_1^2}{T_2^2} = \dfrac{a_1^3}{a_2^3}$.

Радиус Шварцшильда (гравитационный радиус):

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}.$$

Точка Лагранжа L1 в системе двух тел (масса $M \gg m$, расстояние R):

$$r \approx R\sqrt[3]{\frac{m}{3M}}.$$

Годичный параллакс π и расстояние до звезды:

$$r = \frac{a}{\pi\ (\text{рад})} = \frac{206\,265''}{\pi''}\ \text{а.е.}$$

Задачи

Задача 1. Две звезды вращаются вокруг друг друга, сила притяжения между ними равна F. Во сколько раз должно увеличиться расстояние между ними, чтобы сила притяжения осталась неизменной, если масса первой звезды увеличилась в 4 раза?

Задача 2. Две звезды одинаковой массы притягиваются друг к другу с силами, равными по модулю F. Во сколько раз уменьшится модуль сил притяжения между звёздами, если расстояние между их центрами увеличить в 1,5 раза, а массу каждой звезды уменьшить в 4 раза?

Задача 3. Две звезды одинаковой массы m притягиваются друг к другу с силами, равными по модулю F. Во сколько раз больше силы F модуль сил притяжения между другими двумя звёздами, если расстояние между их центрами такое же, как и в первом случае, а массы звёзд равны $2m$ и $3m$?

Задача 4. Две планеты одинаковой массы обращаются вокруг одной и той же звезды. Известно, что сила тяготения, действующая на ближайшую к звезде планету (планета 1), в 5 раз больше силы, с которой звезда действует на более удалённую планету (планету 2). Найдите отношение R_1/R_2. (Ответ округлите до сотых).

Задача 5. Что притягивает Луну сильнее: Земля или Солнце?

Задача 6. Вывести формулы для первой и второй космических скоростей.

Задача 7. Вывести третий закон Кеплера из закона всемирного тяготения.

Задача 8. Вывести и вычислить радиус Шварцшильда для объектов произвольной массы. Рассчитать радиус Шварцшильда для Солнца и для Земли.

Задача 9. Найти расстояние до точки Лагранжа L1 в системе двух тел. Рассказать о применении точек Лагранжа для космических телескопов.

Задача 10. (Всеросс, МЭ, 2023, 9) Нейтронные звёзды образуются при взрывах сверхновых и являются компактными, но чрезвычайно плотными объектами. Средняя плотность нейтронной звезды составляет примерно $5 \cdot 10^{17}$ кг/м^3. Масса Земли составляет $5{,}97 \cdot 10^{24}$ кг. Рассчитайте, каков был бы диаметр Земли, если бы она имела плотность нейтронной звезды.

Задача 11. (Всеросс, МЭ, 2023, 10–11) В далёкой звёздно-планетной системе взорвалась сверхновая. Взрывная волна распространяется в пространстве со скоростью 25 000 км/с. В момент взрыва на расстоянии 15 а.е. проходил исследовательский космический корабль. Чтобы спастись, экипаж корабля принимает решение включить специальный ускоритель, придающий космическому судну ускорение 150 м/с^2 в направлении, противоположном надвигающемуся фронту взрывной волны. Оцените, сможет ли спастись экипаж.

Задача 12. В августе 1960 года на космическом корабле-спутнике отправились в полёт собаки Белка и Стрелка. Совершив 18 витков вокруг Земли, они благополучно приземлились. Сколько времени собаки пробыли в полёте, если радиус Земли около 6400 км, высота орбиты 200 км, орбитальную скорость принять равной 7,8 км/с?

Задача 13. (Всеросс, МЭ, 2023, 7–8) Найдите ширину метеорного потока, метеоры которого наблюдались с 16 июля по 24 августа. (Предполагаем движение Земли перпендикулярно к оси потока).

Задача 14. (Всеросс, МЭ, 2023, 9) Диаметр Млечного Пути составляет 150 000 световых лет. Наша Солнечная система удалена от центра Млечного Пути на 27 000 световых лет и вращается вокруг него со скоростью 220 км/с. Определите: 1) за какое время Солнце делает полный оборот вокруг центра Млечного Пути? 2) Возраст Земли составляет примерно 4,5 млрд лет. Сколько оборотов за это время сделала Земля вокруг центра Галактики?

Задача 15. Угловой диаметр лунного диска равен примерно $32'$. Определите линейный диаметр Луны.

Задача 16. (Всеросс, МЭ, 2023, 9) Вы планируете экспедицию на Марс, но в вашем справочнике остались только следующие сведения: 1) расстояние от Земли до Солнца — 149,6 млн км; 2) период обращения Земли вокруг Солнца — 1 год; 3) период обращения Марса вокруг Солнца — 1,88 года. Определите по этим данным минимальное расстояние от Земли до Марса (считая орбиты планет окружностями).

Задача 17. (Всеросс, МЭ, 2023, 10–11) Обитатели далёкой галактики проживают на планете с эллиптической орбитой вращения вокруг местного солнца. Также в их «солнечной системе» есть много астероидов, равномерно распределённых в пространстве. Астрономы этой цивилизации используют свет от их солнца, чтобы сосчитать количество астероидов, находящихся на прямой линии между звездой и планетой. В первый период измерений длительностью 60 дней они детектировали 1000 астероидов. Некоторое время спустя они начали второй период измерений длиной в 80 дней. Сколько астероидов будет найдено во время второго периода?

Задача 18. Период обращения Земли вокруг Солнца равен 365,25 сут. Определите период обращения астероида № 10876, если известно, что в перигелии своей орбиты (ближайшей точке к Солнцу) он находится на расстоянии 0,3 а.е. от Солнца, а в афелии (самая дальняя точка орбиты) удаляется от него на расстояние в 1,7 а.е.

Решения

Задача 1. **Условие.** Две звезды вращаются вокруг друг друга, сила притяжения между ними равна F. Во сколько раз должно увеличиться расстояние между ними, чтобы сила притяжения осталась неизменной, если масса первой звезды увеличилась в 4 раза?

Решение.

а) Согласно закону всемирного тяготения Ньютона, начальная сила притяжения между звёздами с массами m_1 и m_2, находящимися на расстоянии r_1, равна:

$$F_1 = G\frac{m_1 m_2}{r_1^2} = F.$$

б) По условию масса первой звезды увеличилась в 4 раза: $m_1' = 4m_1$. Пусть новое расстояние между звёздами равно r_2. Тогда новая сила взаимодействия:

$$F_2 = G\frac{m_1' m_2}{r_2^2} = G\frac{4m_1 m_2}{r_2^2}.$$

в) Сила притяжения должна остаться неизменной, то есть $F_2 = F_1$:

$$G\frac{4m_1 m_2}{r_2^2} = G\frac{m_1 m_2}{r_1^2}.$$

г) Сокращая обе части равенства на Gm_1m_2, получаем:

$$\frac{4}{r_2^2} = \frac{1}{r_1^2} \implies r_2^2 = 4r_1^2 \implies r_2 = 2r_1.$$

Ответ: расстояние между звёздами должно увеличиться в 2 раза.

Задача 2. **Условие.** Две звезды одинаковой массы притягиваются друг к другу с силами, равными по модулю F. Во сколько раз уменьшится модуль сил притяжения между звёздами, если расстояние между их центрами увеличить в 1,5 раза, а массу каждой звезды уменьшить в 4 раза?

Решение.

а) Начальная сила притяжения для двух звёзд одинаковой массы m на расстоянии r:

$$F_1 = G\frac{m \cdot m}{r^2} = G\frac{m^2}{r^2} = F.$$

б) В результате изменения параметров системы:

$$m' = \frac{m}{4}, \quad r' = 1{,}5r = \frac{3}{2}r.$$

$$F_2 = G\frac{(m')^2}{(r')^2} = G\frac{\left(\frac{m}{4}\right)^2}{(1{,}5r)^2} = G\frac{\frac{m^2}{16}}{2{,}25r^2} = \frac{1}{16 \times 2{,}25} \cdot G\frac{m^2}{r^2} = \frac{1}{36}F_1.$$

в) Найдём отношение начальной силы к конечной:

$$\frac{F_1}{F_2} = 36.$$

Ответ: модуль сил притяжения уменьшится в 36 раз.

Задача 3. **Условие.** Две звезды одинаковой массы m притягиваются друг к другу с силами, равными по модулю F. Во сколько раз больше силы F модуль сил притяжения между другими двумя звёздами, если расстояние между их центрами такое же, как и в первом случае, а массы звёзд равны $2m$ и $3m$?

Решение.

а) Выразим силу взаимодействия в первом случае:

$$F_1 = G\frac{m \cdot m}{r^2} = G\frac{m^2}{r^2} = F.$$

б) Во втором случае массы тел равны $m_1 = 2m$ и $m_2 = 3m$, а расстояние между ними осталось прежним (r):

$$F_2 = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = G\frac{(2m)\cdot(3m)}{r^2} = 6 \cdot G\frac{m^2}{r^2} = 6F_1 = 6F.$$

в) Отношение сил:

$$\frac{F_2}{F} = 6.$$

Ответ: модуль силы притяжения больше силы F в 6 раз.

Задача 4. **Условие.** Две планеты одинаковой массы обращаются вокруг одной и той же звезды. Известно, что сила тяготения, действующая на ближайшую к звезде планету (планета 1), в 5 раз больше силы, с которой звезда действует на более удалённую планету (планету 2). Найдите отношение R_1/R_2. (Ответ округлите до сотых).

Решение.

а) Пусть масса центральной звезды равна M, массы планет одинаковы и равны m. Силы тяготения, действующие на планеты, находящиеся на расстояниях R_1 и R_2 от звезды:

$$F_1 = G\frac{Mm}{R_1^2}, \quad F_2 = G\frac{Mm}{R_2^2}.$$

б) По условию задачи $F_1 = 5F_2$:

$$G\frac{Mm}{R_1^2} = 5 \cdot G\frac{Mm}{R_2^2}.$$

в) Разделив обе части уравнения на GMm, получаем:

$$\frac{1}{R_1^2} = \frac{5}{R_2^2} \implies \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

г) Находим отношение радиусов орбит:

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{0{,}2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx \frac{\sqrt{5}}{5} \approx \frac{2{,}236068}{5} \approx 0{,}4472.$$

д) Округляем результат до сотых:

$$\frac{R_1}{R_2} \approx 0{,}45.$$

Ответ: $R_1/R_2 \approx 0{,}45$.

Задача 5. **Условие.** Что притягивает Луну сильнее: Земля или Солнце?

Решение.

а) Выпишем справочные астрономические данные:

- Масса Солнца: $M_C \approx 1{,}989 \cdot 10^{30}$ кг;
- Масса Земли: $M_З \approx 5{,}972 \cdot 10^{24}$ кг;
- Масса Луны: $m_Л \approx 7{,}348 \cdot 10^{22}$ кг;
- Среднее расстояние от Земли до Луны: $R_{З-Л} \approx 3{,}844 \cdot 10^{8}$ м;
- Среднее расстояние от Солнца до Земли (и примерно до Луны): $R_{С\text{-}Л} \approx R_{С-З} \approx 1{,}496 \cdot 10^{11}$ м.

б) Запишем формулы сил гравитационного притяжения Луны к Земле и к Солнцу:

$$F_З = G\frac{M_З m_Л}{R_{З\text{-}Л}^2}, \quad F_C = G\frac{M_C m_Л}{R_{С-Л}^2}.$$

в) Найдём отношение силы притяжения Солнца к силе притяжения Земли:

$$\frac{F_C}{F_З} = \frac{M_C}{M_З} \cdot \left(\frac{R_{З\text{-}Л}}{R_{С-Л}}\right)^2.$$

г) Подставим численные значения:

$$\frac{M_C}{M_З} = \frac{1{,}989 \cdot 10^{30}}{5{,}972 \cdot 10^{24}} \approx 3{,}33 \cdot 10^{5},$$

$$\frac{R_{З\text{-}Л}}{R_{С-Л}} = \frac{3{,}844 \cdot 10^{8}}{1{,}496 \cdot 10^{11}} \approx 2{,}5695 \cdot 10^{-3},$$

$$\left(\frac{R_{З\text{-}Л}}{R_{С-Л}}\right)^2 \approx (2{,}5695 \cdot 10^{-3})^2 \approx 6{,}602 \cdot 10^{-6}.$$

д) Перемножим полученные отношения:

$$\frac{F_C}{F_З} \approx 3{,}33 \cdot 10^{5} \cdot 6{,}602 \cdot 10^{-6} \approx 2{,}20.$$

е) **Физический вывод:** Солнце притягивает Луну примерно в 2,2 раза сильнее, чем Земля. Луна не покидает орбиту вокруг Земли, потому что Земля и Луна движутся в гравитационном поле Солнца совместно, находясь в состоянии свободного падения с практически одинаковым ускорением. Движение Луны относительно Земли определяется разностью сил (приливным полем) и гравитацией Земли в её сфере Хилла.

Ответ: Солнце притягивает Луну сильнее (приблизительно в 2,2 раза).

Задача 6. **Условие.** Вывести формулы для первой и второй космических скоростей.
Решение.

а) **Первая космическая скорость** (v_1) — минимальная начальная скорость, которую необходимо придать телу на поверхности небесного тела (радиуса R и массы M), чтобы вывести его на круговую орбиту пренебрежимо малой высоты:

- При движении по круговой орбите сила всемирного тяготения сообщает телу нормальное (центростремительное) ускорение:

$$F_{\text{тяг}} = ma_n \implies G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v_1^2}{R}.$$

- Сокращая обе части уравнения на массу спутника m и радиус R, получаем:

$$v_1^2 = \frac{GM}{R} \implies v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

- С учётом ускорения свободного падения на поверхности $g = \frac{GM}{R^2}$, выражение принимает вид:

$$v_1 = \sqrt{gR}.$$

б) **Вторая космическая скорость** (v_2) — минимальная скорость, которую необходимо сообщить телу на поверхности, чтобы оно преодолело гравитационное притяжение и ушло на бесконечно удалённое расстояние (параболическая скорость):

- По закону сохранения механической энергии, полная механическая энергия тела на поверхности должна быть равна нулю (для минимальной необходимой скорости тело на бесконечности имеет нулевую кинетическую и нулевую потенциальную энергию):

$$E = E_k + E_p = \frac{mv_2^2}{2} - G\frac{Mm}{R} = 0.$$

- Отсюда выражаем скорость v_2:

$$\frac{mv_2^2}{2} = G\frac{Mm}{R} \implies v_2^2 = \frac{2GM}{R} \implies v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

- Сопоставляя с первой космической скоростью:

$$v_2 = \sqrt{2}\, v_1.$$

Ответ: $v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$, $v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2}\, v_1$.

Задача 7. **Условие.** Вывести третий закон Кеплера из закона всемирного тяготения.
Решение.

а) Рассмотрим движение планеты массы m вокруг массивной звезды массы M ($M \gg m$) по круговой орбите радиуса a.

б) Уравнение второго закона Ньютона в проекции на радиальную ось:

$$G\frac{Mm}{a^2} = m\omega^2 a.$$

в) Связь угловой скорости ω с периодом обращения планеты T:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

г) Подставляем угловую скорость в уравнение движения:

$$G\frac{M}{a^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a = \frac{4\pi^2 a}{T^2}.$$

д) Преобразуем соотношение, сгруппировав периоды и радиусы орбит:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \implies \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{const}.$$

е) Для двух планет, обращающихся вокруг одного центрального тела:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

ж) **Обобщённый третий закон Кеплера:** при учёте взаимного движения двух гравитирующих тел с массами M и m вокруг их общего центра масс (где a — большая полуось относительной орбиты):

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M+m)}{4\pi^2} \implies \frac{T^2(M+m)}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G}.$$

Ответ: $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM}$ (для $M \gg m$) и $\dfrac{T^2(M+m)}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{G}$ (в общем виде).

Задача 8. **Условие.** Вывести и вычислить радиус Шварцшильда для объектов произвольной массы. Рассчитать радиус Шварцшильда для Солнца и для Земли.

Решение.

а) **Вывод формулы.** Радиус Шварцшильда R_s (гравитационный радиус) определяет критический радиус сферы, с поверхности которой даже свет не может уйти на бесконечность. Приравнивая вторую космическую скорость к скорости света c:

$$v_2 = c \implies \sqrt{\frac{2GM}{R_s}} = c.$$

Возводя обе части в квадрат:

$$\frac{2GM}{R_s} = c^2 \implies R_s = \frac{2GM}{c^2}.$$

Примечание: точный релятивистский вывод в рамках Общей теории относительности (решение Шварцшильда для статического сферически-симметричного вакуумного поля) приводит к абсолютно такому же выражению для радиуса горизонта событий.

б) **Расчёт для Солнца:**

$$M_\odot \approx 1{,}989 \cdot 10^{30} \text{ кг}, \quad G \approx 6{,}674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2), \quad c \approx 2{,}998 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

$$R_{s,\odot} = \frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}}{(2{,}998 \cdot 10^8)^2} \approx \frac{2{,}655 \cdot 10^{20}}{8{,}988 \cdot 10^{16}} \approx 2954 \text{ м} \approx 2{,}95 \text{ км}.$$

в) Расчёт для Земли:

$$M_\oplus \approx 5{,}972 \cdot 10^{24} \text{ кг}.$$

$$R_{s,\oplus} = \frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}}{(2{,}998 \cdot 10^8)^2} \approx \frac{7{,}971 \cdot 10^{14}}{8{,}988 \cdot 10^{16}} \approx 8{,}87 \cdot 10^{-3} \text{ м} \approx 8{,}9 \text{ мм}.$$

Ответ: $R_s = \dfrac{2GM}{c^2}$; для Солнца $R_{s,\odot} \approx 2{,}95$ км, для Земли $R_{s,\oplus} \approx 8{,}9$ мм.

Задача 9. Условие. Найти расстояние до точки Лагранжа L1 в системе двух тел. Рассказать о применении точек Лагранжа для космических телескопов.

Решение.

а) Определение положения точки L1. Точка Лагранжа L1 расположена на отрезке, соединяющем центры масс большего тела (Солнце, масса M) и меньшего тела (Земля, масса m), на расстоянии r от меньшего тела. Расстояние между телами обозначим R ($r \ll R$).

Во вращающейся системе координат с началом в центре масс системы и угловой скоростью орбитального движения Ω на пробную массу действуют две силы тяготения и центробежная сила:

$$F_{\text{тяг},M} - F_{\text{тяг},m} - F_{\text{цб}} = 0.$$

Расстояние от Солнца до точки L1 равно $R - r$. Учитывая, что $M \gg m$, центр масс системы практически совпадает с центром Солнца, а $\Omega^2 \approx \dfrac{GM}{R^3}$:

$$\frac{GM}{(R-r)^2} - \frac{Gm}{r^2} = \Omega^2(R-r) \approx \frac{GM}{R^3}(R-r).$$

Разложим слагаемое в левой части по формуле бинома для малого параметра $\dfrac{r}{R} \ll 1$:

$$\frac{1}{(R-r)^2} = \frac{1}{R^2\left(1-\frac{r}{R}\right)^2} \approx \frac{1}{R^2}\left(1 + 2\frac{r}{R}\right).$$

Подставляя разложение в уравнение:

$$\frac{GM}{R^2}\left(1 + 2\frac{r}{R}\right) - \frac{Gm}{r^2} = \frac{GM}{R^2}\left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Приведём подобные слагаемые:

$$\frac{GM}{R^2} + \frac{2GMr}{R^3} - \frac{Gm}{r^2} = \frac{GM}{R^2} - \frac{GMr}{R^3} \implies \frac{3GMr}{R^3} = \frac{Gm}{r^2}.$$

Отсюда:

$$\frac{3M}{R^3} = \frac{m}{r^3} \implies r^3 = R^3\left(\frac{m}{3M}\right) \implies r \approx R\sqrt[3]{\frac{m}{3M}}.$$

б) Численный расчёт для системы Солнце–Земля:

$$\frac{m}{3M} \approx \frac{5{,}972 \cdot 10^{24}}{3 \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}} \approx 1{,}00 \cdot 10^{-6}.$$

Тогда:

$$r \approx 1{,}496 \cdot 10^8 \text{ км} \cdot \sqrt[3]{10^{-6}} = 1{,}496 \cdot 10^8 \cdot 10^{-2} \approx 1{,}5 \cdot 10^6 \text{ км}.$$

в) Применение точек Лагранжа для космических телескопов:

- **Точка L1:** аппарат находится всегда между Землёй и Солнцем. Земля не заслоняет поле обзора. Это идеальное место для солнечных обсерваторий и мониторинга космической погоды:
  - SOHO (Solar and Heliospheric Observatory);
  - DSCOVR (Deep Space Climate Observatory).
- **Точка L2:** расположена с ночной стороны Земли (на расстоянии примерно 1,5 млн км от неё по линии Солнце–Земля). Земля и Солнце всегда находятся в одном направлении за спиной приборов. Это позволяет использовать компактный многослойный тепловой экран для защиты инфракрасных сенсоров от солнечного и земного теплового фона и проводить сверхчувствительные наблюдения глубокого космоса:
  - James Webb Space Telescope (JWST);
  - Planck, WMAP (исследования реликтового излучения);
  - Gaia, Спектр-РГ (астрометрия и рентгеновская астрономия).
- Аппараты не висят неподвижно в сингулярной точке, а обращаются по квазипериодическим «гало-орбитам» или орбитам Лиссажу, требующим минимальных затрат топлива на коррекцию положения.

Ответ: $r \approx R\sqrt[3]{\dfrac{m}{3M}} \approx 1{,}5 \cdot 10^6$ км от Земли в сторону Солнца.

Задача 10. **Условие.** (Всеросс, МЭ, 2023, 9) Нейтронные звёзды образуются при взрывах сверхновых и являются компактными, но чрезвычайно плотными объектами. Средняя плотность нейтронной звезды составляет примерно $5 \cdot 10^{17}$ кг/м^3. Масса Земли составляет $5{,}97 \cdot 10^{24}$ кг. Рассчитайте, каков был бы диаметр Земли, если бы она имела плотность нейтронной звезды.

Решение. Объём Земли при плотности нейтронной звезды:

$$V = \frac{M}{\rho} = \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{кг}}{5 \cdot 10^{17}\ \text{кг/м}^3} = 1{,}194 \cdot 10^7\ \text{м}^3.$$

Считая тело шарообразным ($V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3$):

$$D = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 1{,}194 \cdot 10^7}{3{,}14159}} = \sqrt[3]{2{,}2805 \cdot 10^7}\ \text{м} \approx 283{,}6\ \text{м} \approx 284\ \text{м}.$$

Ответ: диаметр составил бы приблизительно 284 м.

Задача 11. **Условие.** (Всеросс, МЭ, 2023, 10–11) В далёкой звёздно-планетной системе взорвалась сверхновая. Взрывная волна распространяется в пространстве со скоростью 25 000 км/с. В момент взрыва на расстоянии 15 а.е. проходил исследовательский космический корабль. Чтобы спастись, экипаж корабля принимает решение включить специальный ускоритель, придающий космическому судну ускорение 150 м/с^2 в направлении, противоположном надвигающемуся фронту взрывной волны. Оцените, сможет ли спастись экипаж.

Решение. Переведём данные в систему СИ:

$$v_B = 25\,000\ \text{км/с} = 2{,}5 \cdot 10^7\ \text{м/с},$$

$$L_0 = 15 \text{ а.е.} = 15 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11} \text{ м} = 2{,}244 \cdot 10^{12} \text{ м},$$
$$a = 150 \text{ м/с}^2.$$

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ взрыв произошёл в начале координат ($x = 0$), а корабль находился в точке $x = L_0$ и покоился относительно источника взрыва ($v_0 = 0$).

Уравнение движения волны:

$$x_B(t) = v_B t.$$

Уравнение движения корабля:

$$x_K(t) = L_0 + \frac{at^2}{2}.$$

Волна настигнет корабль, если существует действительное время $t > 0$, при котором $x_B(t) = x_K(t)$:

$$\frac{a}{2}t^2 - v_B t + L_0 = 0.$$

Исследуем дискриминант данного квадратного уравнения:

$$D = v_B^2 - 4 \cdot \frac{a}{2} \cdot L_0 = v_B^2 - 2aL_0.$$

Вычислим значение членов:

$$v_B^2 = (2{,}5 \cdot 10^7)^2 = 6{,}25 \cdot 10^{14} \text{ м}^2/\text{с}^2,$$
$$2aL_0 = 2 \cdot 150 \cdot 2{,}244 \cdot 10^{12} = 6{,}732 \cdot 10^{14} \text{ м}^2/\text{с}^2.$$

Следовательно:

$$D = 6{,}25 \cdot 10^{14} - 6{,}732 \cdot 10^{14} = -0{,}482 \cdot 10^{14} < 0.$$

Поскольку дискриминант строго отрицателен, уравнение не имеет действительных корней. Волна никогда не догонит корабль. Минимальное расстояние между волной и кораблём достигается в момент времени, когда скорость корабля сравнивается со скоростью волны ($at = v_B \implies t = 1{,}67 \cdot 10^5$ с $\approx 46{,}3$ ч):

$$\Delta x_{\min} = L_0 - \frac{v_B^2}{2a} = 2{,}244 \cdot 10^{12} - 2{,}083 \cdot 10^{12} = 1{,}61 \cdot 10^{11} \text{ м} \approx 1{,}08 \text{ а.е.} > 0.$$

Ответ: экипаж сможет спастись.

Задача 12. Условие. В августе 1960 года на космическом корабле-спутнике отправились в полёт собаки Белка и Стрелка. Совершив 18 витков вокруг Земли, они благополучно приземлились. Сколько времени собаки пробыли в полёте, если радиус Земли около 6400 км, высота орбиты 200 км, орбитальную скорость принять равной 7,8 км/с?

Решение. Радиус круговой орбиты корабля-спутника:

$$R = R_3 + h = 6400 + 200 = 6600 \text{ км}.$$

Длина одного витка (длина окружности орбиты):

$$C = 2\pi R = 2 \cdot 3{,}14159 \cdot 6600 \approx 41\,469 \text{ км}.$$

Период обращения на одном витке:

$$T = \frac{C}{v} = \frac{41\,469 \text{ км}}{7{,}8 \text{ км/с}} \approx 5316{,}5 \text{ с} \approx 88{,}6 \text{ мин}.$$

Общее время полёта за $N = 18$ витков:

$$t = N \cdot T = 18 \cdot 5316{,}5 \text{ с} \approx 95\,700 \text{ с} = 1595 \text{ мин} \approx 26 \text{ ч } 35 \text{ мин}.$$

Ответ: собаки пробыли в полёте приблизительно 26 часов 35 минут (около 1 суток 2 часов 35 минут).

Задача 13. Условие. (Всеросс, МЭ, 2023, 7–8) Найдите ширину метеорного потока, метеоры которого наблюдались с 16 июля по 24 августа. (Предполагаем движение Земли перпендикулярно к оси потока).

Решение.

1. Подсчитаем длительность периода наблюдения (в июле 31 день):

$$\Delta t = (31 - 16) + 24 = 15 + 24 = 39 \text{ суток.}$$

(При учёте обоих граничных дней: $\Delta t \approx 40$ суток). В секундах:

$$\Delta t = 39 \cdot 86\,400 \text{ с} \approx 3{,}37 \cdot 10^6 \text{ с.}$$

2. Земля движется по орбите со средней скоростью $v \approx 29{,}8$ км/с. При перпендикулярном пересечении потока его линейная ширина:

$$L = v \cdot \Delta t \approx 29{,}8 \text{ км/с} \cdot 3{,}37 \cdot 10^6 \text{ с} \approx 1{,}0 \cdot 10^8 \text{ км} \approx 0{,}67 \text{ а.е.}$$

(Для 40 суток: $L \approx 1{,}03 \cdot 10^8$ км $\approx 0{,}69$ а.е.).

Ответ: около 10^8 км (или $\approx 0{,}67$–$0{,}69$ а.е.).

Задача 14. Условие. (Всеросс, МЭ, 2023, 9) Диаметр Млечного Пути составляет 150 000 световых лет. Наша Солнечная система удалена от центра Млечного Пути на 27 000 световых лет и вращается вокруг него со скоростью 220 км/с. Определите: 1) за какое время Солнце делает полный оборот вокруг центра Млечного Пути? 2) Возраст Земли составляет примерно 4,5 млрд лет. Сколько оборотов за это время сделала Земля вокруг центра Галактики?

Решение.

1. Радиус орбиты Солнечной системы: $R = 27\,000$ св. лет. Переведём его в километры (1 св. год $\approx 9{,}46 \cdot 10^{12}$ км):

$$R = 27\,000 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{12} \text{ км} \approx 2{,}554 \cdot 10^{17} \text{ км.}$$

Длина круговой орбиты:

$$C = 2\pi R = 2 \cdot 3{,}1416 \cdot 2{,}554 \cdot 10^{17} \text{ км} \approx 1{,}605 \cdot 10^{18} \text{ км.}$$

Период обращения:

$$T = \frac{C}{v} = \frac{1{,}605 \cdot 10^{18} \text{ км}}{220 \text{ км/с}} \approx 7{,}295 \cdot 10^{15} \text{ с.}$$

Переведём в годы (1 год $\approx 3{,}156 \cdot 10^7$ с):

$$T = \frac{7{,}295 \cdot 10^{15}}{3{,}156 \cdot 10^7} \approx 2{,}31 \cdot 10^8 \text{ лет} \approx 230 \text{ млн лет.}$$

2. Число галактических оборотов Земли за её возраст ($t_З = 4{,}5 \cdot 10^9$ лет):

$$N = \frac{t_З}{T} = \frac{4{,}5 \cdot 10^9}{2{,}31 \cdot 10^8} \approx 19{,}5 \approx 20 \text{ оборотов.}$$

Ответ: 1) около 230 млн лет; 2) примерно 19–20 оборотов.

Задача 15. **Условие.** Угловой диаметр лунного диска равен примерно $32'$. Определите линейный диаметр Луны. **Решение.** Среднее расстояние от Земли до Луны: $r \approx 384\,400$ км.

Угловой диаметр в радианах:

$$\theta = 32' = \frac{32}{60 \cdot 57{,}296} = \frac{32 \cdot \pi}{60 \cdot 180} \approx 0{,}009308 \text{ рад.}$$

Линейный диаметр Луны:

$$D_{\text{Л}} = r \cdot \theta \approx 384\,400 \text{ км} \cdot 0{,}009308 \approx 3478 \text{ км.}$$

Ответ: примерно 3480 км.

Задача 16. **Условие.** (Всеросс, МЭ, 2023, 9) Вы планируете экспедицию на Марс, но в вашем справочнике остались только следующие сведения: 1) расстояние от Земли до Солнца — 149,6 млн км; 2) период обращения Земли вокруг Солнца — 1 год; 3) период обращения Марса вокруг Солнца — 1,88 года. Определите по этим данным минимальное расстояние от Земли до Марса (считая орбиты планет окружностями).

Решение. По третьему закону Кеплера для планет Солнечной системы:

$$\frac{a_M^3}{a_3^3} = \frac{T_M^2}{T_3^2} \implies a_M = a_3 \left(\frac{T_M}{T_3}\right)^{2/3}.$$

Подставляя значения ($a_3 = 1$ а.е., $T_3 = 1$ год, $T_M = 1{,}88$ года):

$$a_M = 1 \cdot (1{,}88)^{2/3} \approx (3{,}5344)^{1/3} \approx 1{,}523 \text{ а.е.}$$

Минимальное расстояние между круговыми компланарными орбитами достигается во время противостояния:

$$d_{\min} = a_M - a_3 = 1{,}523 - 1{,}0 = 0{,}523 \text{ а.е.}$$

В километрах:

$$d_{\min} = 0{,}523 \cdot 149{,}6 \cdot 10^6 \text{ км} \approx 78{,}2 \cdot 10^6 \text{ км} = 78{,}2 \text{ млн км.}$$

Ответ: 78,2 млн км (или $\approx 0{,}52$ а.е.).

Задача 17. **Условие.** (Всеросс, МЭ, 2023, 10–11) Обитатели далёкой галактики проживают на планете с эллиптической орбитой вращения вокруг местного солнца. Также в их «солнечной системе» есть много астероидов, равномерно распределённых в пространстве. Астрономы этой цивилизации используют свет от их солнца, чтобы сосчитать количество астероидов, находящихся на прямой линии между звездой и планетой. В первый период измерений длительностью 60 дней они детектировали 1000 астероидов. Некоторое время спустя они начали второй период измерений длиной в 80 дней. Сколько астероидов будет найдено во время второго периода?

Решение. Прямая линия между планетой и звездой представляет собой радиус-вектор планеты. При движении планеты радиус-вектор за время Δt заметает в плоскости орбиты сектор площадью ΔS. Поскольку астероиды распределены в пространстве равномерно, их число N, попавшее в зону визирования, прямо пропорционально площади, заметённой радиус-вектором: $N \propto \Delta S$.

Согласно второму закону Кеплера (закону площадей), радиус-вектор планеты за равные промежутки времени заметает равные площади:

$$\frac{dS}{dt} = \text{const} \implies \Delta S \propto \Delta t.$$

Секториальная скорость планеты постоянна на любых участках эллиптической орбиты. Следовательно, число обнаруженных астероидов прямо пропорционально только продолжительности наблюдений:

$$N_2 = N_1 \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = 1000 \cdot \frac{80}{60} = \frac{4000}{3} \approx 1333 \text{ астероида.}$$

Ответ: 1333 астероида.

Задача 18. Условие. Период обращения Земли вокруг Солнца равен 365,25 сут. Определите период обращения астероида № 10876, если известно, что в перигелии своей орбиты (ближайшей точке к Солнцу) он находится на расстоянии 0,3 а.е. от Солнца, а в афелии (самая дальняя точка орбиты) удаляется от него на расстояние в 1,7 а.е.

Решение.

1. Большая полуось орбиты астероида равна полусумме расстояний в перигелии и афелии:
$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{0{,}3 \text{ а.е.} + 1{,}7 \text{ а.е.}}{2} = \frac{2{,}0}{2} = 1{,}0 \text{ а.е.}$$

2. Согласно третьему закону Кеплера, период обращения зависит исключительно от большой полуоси орбиты:
$$\frac{T^2}{T_3^2} = \frac{a^3}{a_3^3}.$$
Поскольку $a = 1{,}0$ а.е. $= a_3$, период обращения астероида в точности равен периоду обращения Земли:
$$T = T_3 = 365{,}25 \text{ суток} = 1 \text{ год.}$$

Ответ: 365,25 суток (1 год).