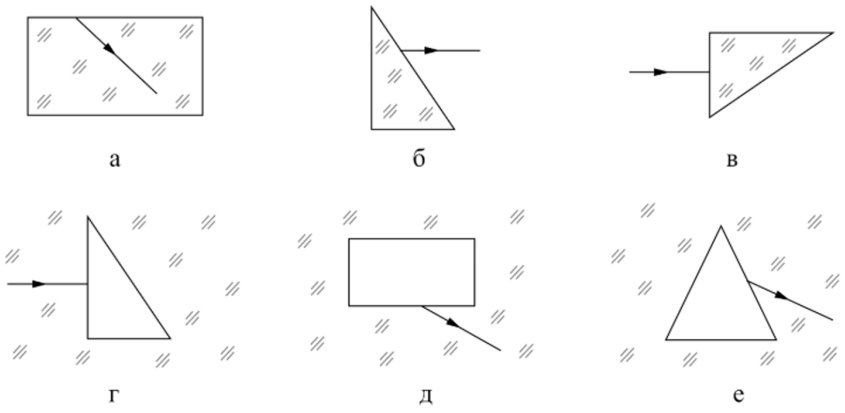
Задачки и теория на занятие по олимпиадной физике: Оптика

Преподаватель: Сорокина Василиса Ивановна

Задачи по геометрической оптике

Задача 1. Постройте ход лучей до и после прохождения границы раздела сред. Среда с заливкой имеет больший показатель преломления.



Задача 2. Найдите угол падения светового луча на поверхность стекла, если преломлённый луч перпендикулярен отражённому. Скорость света в воздухе равна $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; скорость света в стекле — $v = 2 \cdot 10^8$ м/с.

Задача 3. Определить угол полного внутреннего отражения на границе раздела сред стекло–воздух, если для стекла $n = 1.5163$.

Задача 4. Свет идёт из среды с показателем преломления $n_1 = 2.1$ под углом $30°$ в среду с показателем преломления $n_2 = 1$. Найдите угол, под которым луч выходит во вторую среду.

Задача 5. На дне сосуда с жидкостью с показателем преломления 5/3 помещён точечный источник света. Какого минимального радиуса (в см) должен быть непрозрачный диск, плавающий на поверхности жидкости, чтобы, глядя сверху, нельзя было увидеть этот источник? Высота слоя жидкости 12 см.

Задача 6. Глубина водоёма 2 м. Определите кажущуюся глубину водоёма (в см), если его дно рассматривают, склонившись над водой и глядя вертикально вниз. Показатель преломления воды 4/3. Углы считать малыми, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha$.

Задача 7. На дне сосуда с водой лежит плоское зеркало. Толщина слоя воды 16 см. На расстоянии 20 см от поверхности воды находится точечный источник света. На каком расстоянии (в см) от зеркала находится его изображение, образуемое лучами, вышедшими обратно из воды? Показатель преломления воды 4/3. Углы считать малыми, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha$.

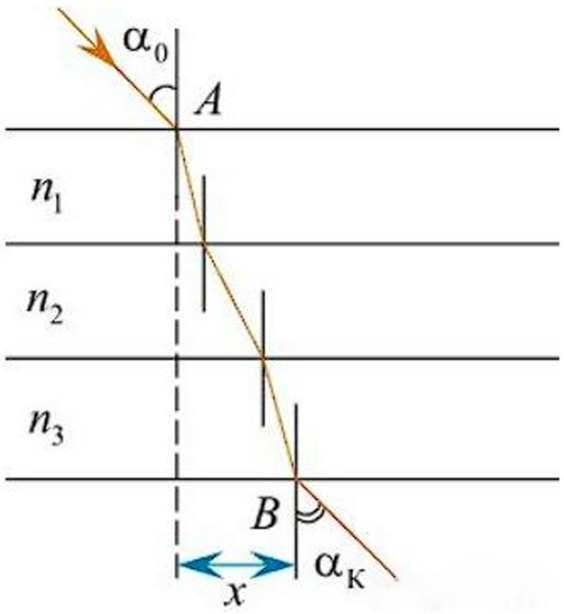
Задача 8. В ясный солнечный день на поверхности пруда плавает плот, отбрасывая на горизонтальное дно пруда тень в форме круга диаметра $D = 2$ м. Какова глубина пруда H, если при затягивании неба сплошной облачностью тень от плота на дне пруда превращается в точку? Показатель преломления воды относительно воздуха $n = 1,33$. Поверхность воды считайте гладкой. Толщиной плота можно пренебречь.

Задача 9. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) В ясный солнечный день на поверхности пруда плавает плот, отбрасывая на горизонтальное дно пруда тень в форме квадрата со стороной $2a = 2$ м. Какова глубина пруда, если при затягивании неба сплошной облачностью тень на дне пруда вырождается в точку? Показатель преломления воды относительно воздуха $n = 1,33$. Поверхность воды считать гладкой. Толщиной плота пренебречь.

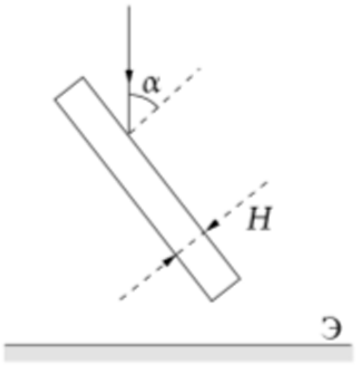
Задача 10. (МФТИ, 1994) На спокойной поверхности водоёма появилось пятно загрязнения радиуса $R = 5$ м, не пропускающее свет. Определите размер области на дне водоёма, куда не попадает свет. Поверхность воды освещается рассеянным светом. Глубина водоёма $H = 2,6$ м. Показатель преломления воды $n = 4/3$. Отражение от дна не учитывать.

Задача 11. (МФТИ, 1994) Поверхность озера глубиной $H = 1,3$ м покрыта тонким слоем льда со снегом, практически не пропускающим свет. Найти площадь светлого пятна на дне озера от полыньи в форме круга радиуса $R = 2$ м. Озеро освещается рассеянным светом. Показатель преломления воды $n = 4/3$.

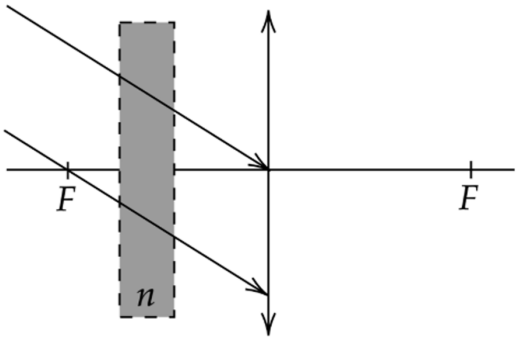
Задача 12. Три плоскопараллельные стеклянные пластинки одинаковой толщины, но с различными показателями преломления сложены вплотную друг к другу. Из воздуха на поверхность верхней пластинки в точку A падает луч света под углом α_0. В точке B луч света выходит обратно в воздух. Точки A и B смещены друг относительно друга вдоль пластинок на расстояние x. Среднюю пластинку заменяют на другую — такой же толщины, но с меньшим показателем преломления. Как в результате этого изменятся расстояние x и угол преломления света при переходе из второй пластинки в третью? Ответ подтвердите рисунком.



Задача 13. МФТИ, 1987. Луч света падает на плоскопараллельную пластинку толщиной $H = 1$ см из стекла с показателем преломления $n = 1,73$ (см. рисунок). Из-за многократных отражений от граней пластинки на экране Э образуется ряд светлых пятен. Найдите расстояние между пятнами, если угол падения $\alpha = 60°$, а падающий луч перпендикулярен плоскости экрана. Плоскость падения луча совпадает с плоскостью рисунка.

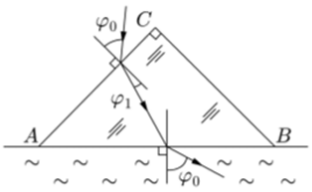


Задача 14. На тонкую собирающую линзу от удалённого источника падает пучок параллельных лучей (см. рисунок). Как изменится положение изображения источника, создаваемого линзой, если между линзой и её фокусом поставить плоскопараллельную стеклянную пластинку с показателем преломления n (на рисунке положение пластинки отмечено пунктиром)? Ответ поясните, указав, какие физические закономерности Вы использовали. Сделайте рисунок, поясняющий ход лучей до и после установки плоскопараллельной стеклянной пластинки.

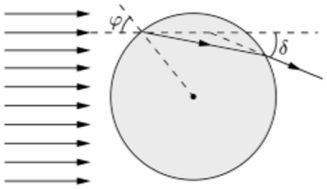


Задача 15. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11) Две несмешивающиеся жидкости налиты в стакан так, что высота верхнего слоя жидкости h_1 в два раза больше высоты нижнего слоя жидкости h_2. Показатели преломления жидкостей — $n_1 = 1,5$ и $n_2 = 1,75$ соответственно. При взгляде «прямо сверху» видимое расстояние до дна сосуда от верхней границы жидкости равно $H = 8$ см. Найдите h_1 и h_2.

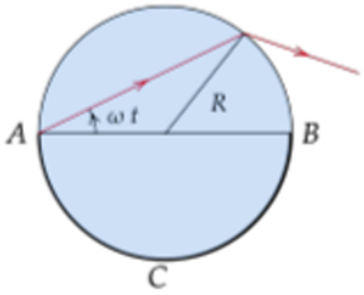
Задача 16. Всеросс., 2010, РЭ, 11. Поверхности воды касается равнобедренная стеклянная призма ABC (см. рисунок). Луч света, падающий из воздуха под углом φ_0 на грань AC, после прохождения призмы выходит через грань AB под тем же углом φ_0. Чему равен угол преломления φ_1? Показатель преломления воды $n_0 = 4/3$, угол C при вершине призмы — прямой. Величина угла φ_0 неизвестна.



Задача 17. (МФТИ, 1994) Шар из оптически прозрачного материала помещён в параллельный пучок света (см. рисунок). Угол падения одного из лучей на поверхность шара $\varphi = \operatorname{arctg}(4/3)$. Угол его отклонения от первоначального направления после двух преломлений на поверхности шара $\delta = 2\operatorname{arctg}(7/24)$. Найти показатель преломления материала шара.



Задача 18. (Всеросс., 2017, финал, 9) Внутри стеклянного тонкостенного цилиндрического сосуда радиуса R вблизи его стенки в точке A расположен микролазер, размеры которого гораздо меньше R. Сосуд заполнен водой, а снаружи находится воздух. Половина внутренней поверхности сосуда, соответствующая дуге ACB, зачернена и поглощает свет. Изначально луч лазера направлен в точку B. Лазер начинает вращаться с постоянной угловой скоростью ω против часовой стрелки в плоскости рисунка вокруг оси, проходящей через точку A (рис.). Показатель преломления воды $n = 4/3$. Через какое время τ луч перестанет выходить из сосуда? Чему будет равна скорость «зайчика» на зачернённой поверхности цилиндра в момент времени $1,5\tau$ от начала движения?



Задача 19. «Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11. Прозрачный цилиндр, верхний торец которого находится в воздухе, помещён в воду. Точечный источник света S расположен вне цилиндра на его оси вблизи верхнего торца. Найдите минимальный показатель преломления n материала цилиндра, при котором ни один луч, вошедший через основание, не выйдет через боковую поверхность наружу. Показатель преломления воды $n_{\text{в}} = 1,33$.

Задача 20. («Росатом», 2011, 2013, 11) Точечный источник света находится на расстоянии d от зеркала. Зеркало повернули на угол $\alpha = \arcsin(1/2)$ вокруг оси, перпендикулярной чертежу и проходящей через точку O (повёрнутое зеркало показано пунктиром). Найти перемещение изображения.



Задача 21. Человек смотрит на рыбку, находящуюся в диаметрально противоположной от него точке шарового аквариума радиусом R. На сколько смещено при этом изображение рыбки относительно самой рыбки? Показатель преломления воды $n = 4/3$.

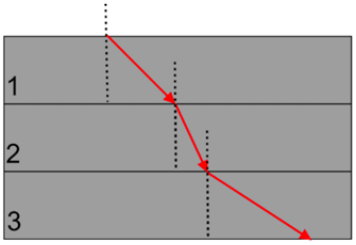
Задача 22. В прямоугольной комнате на одной из стен висит картина, а на другой — плоское зеркало (см. рисунок). Из какой точки комнаты (A, B или C) можно полностью увидеть отражение картины в зеркале?



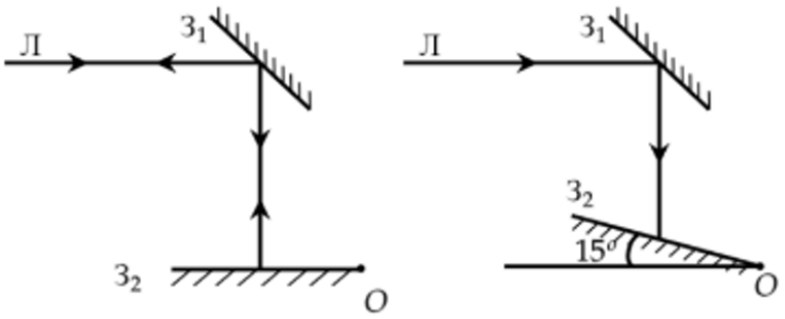
Задача 23. Угол падения луча на поверхность (к нормали) равен 40°. Чему равен угол между падающим и отражённым лучом?

Задача 24. При повороте плоского зеркала вокруг оси, проходящей через точку падения луча перпендикулярно плоскости, в которой лежат падающий и отражённый лучи, угол между падающим и отражённым лучом увеличился на 40°. На какой угол было повёрнуто зеркало?

Задача 25. На рисунке изображён ход луча в трёх средах. Найдите наиболее оптически плотную среду.



Задача 26. На рисунке слева изображены два плоских зеркала ($З_1$ и $З_2$) и луч, горизонтально падающий на зеркало 1. Зеркало 2 поворачивают относительно горизонтальной оси, проходящей через точку O, на угол 15° (рисунок справа). Под каким углом к горизонту будет распространяться луч, отражённый от зеркала 2?



Задача 27. Точечный источник света находится на расстоянии 1.2 м от плоского зеркала. На сколько уменьшится расстояние между источником и его изображением, если, не поворачивая зеркала, пододвинуть его ближе к источнику на 0.3 м?

Задача 28. На поверхности водоёма глубиной 1.3 м плавает круг радиусом 3 м. Прямо над кругом находится источник света. Синус угла падения лучей света на края круга $\sin\alpha = 3/4$. Каков радиус тени круга, если $n_{\text{воды}}/n_{\text{воздуха}} = 4/3$?

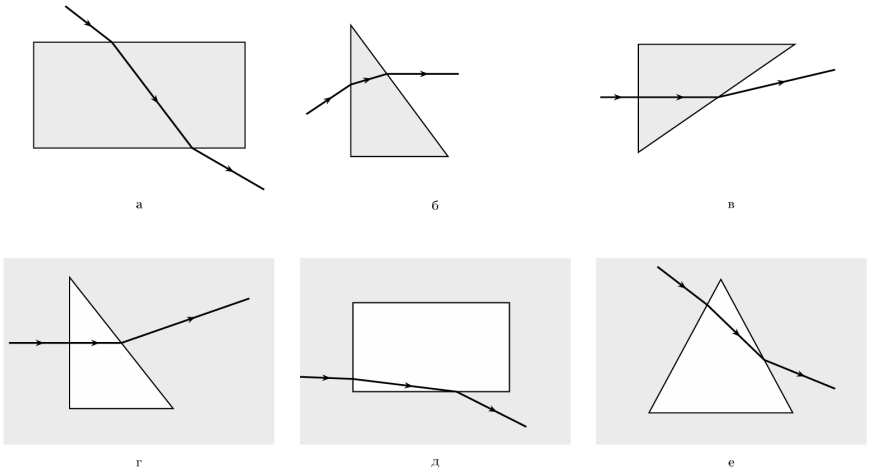
Задача 29. Свая вбита в водоём перпендикулярно дну, высота части сваи, находящейся над водой, 0.8 м. Наблюдатель смотрит на конец сваи из-под воды. Какова видимая высота части сваи над водой для наблюдателя, если $n_{\text{воды}}/n_{\text{воздуха}} = 1.4$? Углы принять малыми.

Задача 30. На поверхности водоёма глубиной 2 м плавает круг радиусом 1.7 м. Прямо над кругом находится источник света. Угол падения лучей света на края круга $\alpha = 30°$. Каков радиус тени круга, если $n_{\text{жидкости}} = 5/3$?

Решения

Задача 1. **Условие.** Постройте ход лучей до и после прохождения границы раздела сред. Среда с заливкой имеет больший показатель преломления.

Решение.



Задача 2. **Условие.** Найдите угол падения светового луча на поверхность стекла, если преломлённый луч перпендикулярен отражённому. Скорость света в воздухе равна $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; скорость света в стекле — $v = 2 \cdot 10^8$ м/с.

Решение. 1. Показатель преломления стекла относительно воздуха:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^8} = 1.5.$$

2. Пусть угол падения равен α. По закону отражения угол отражения также равен α. Угол преломления обозначим β. По условию угол между отражённым и преломлённым лучами равен $90°$:

$$(90° - \alpha) + (90° - \beta) = 90° \implies \alpha + \beta = 90° \implies \beta = 90° - \alpha.$$

3. По закону Снеллиуса для границы воздух-стекло ($n_{\text{возд}} = 1$):

$$\sin\alpha = n \sin\beta = n \sin(90° - \alpha) = n \cos\alpha.$$

Разделив обе части на $\cos\alpha$, получаем формулу Брюстера:

$$\operatorname{tg}\alpha = n = 1.5.$$

Отсюда:

$$\alpha = \operatorname{arctg}(1,5) \approx 56,31° \approx 56°19'.$$

Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg}(1,5) \approx 56,3°$.

Задача 3. **Условие.** Определить угол полного внутреннего отражения на границе раздела сред стекло–воздух, если для стекла $n = 1.5163$.

Решение. Полное внутреннее отражение наблюдается при переходе света из оптически более плотной среды (стекло с показателем преломления n) в оптически менее плотную

(воздух с показателем $n_0 = 1$). Предельный угол падения α_0 соответствует углу преломления $\beta = 90°$:

$$n \sin \alpha_0 = 1 \cdot \sin 90° = 1 \implies \sin \alpha_0 = \frac{1}{n}.$$

$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{1,5163} \approx 0,6595.$$

$$\alpha_0 = \arcsin(0,6595) \approx 41,26° \approx 41°16'.$$

Ответ: $\alpha_0 = \arcsin\left(\frac{1}{1,5163}\right) \approx 41,3°$.

Задача 4. **Условие.** Свет идёт из среды с показателем преломления $n_1 = 2.1$ под углом $30°$ в среду с показателем преломления $n_2 = 1$. Найдите угол, под которым луч выходит во вторую среду.

Решение. Запишем закон преломления Снеллиуса:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta,$$

где $\alpha = 30°$ — угол падения в первой среде, β — искомый угол выхода во вторую среду. Выразим $\sin \beta$:

$$\sin \beta = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha = \frac{2,1}{1} \cdot \sin 30° = 2,1 \cdot 0,5 = 1,05.$$

Так как значение синуса не может превышать единицу ($\sin \beta = 1,05 > 1$), действительного угла преломления не существует. Это означает, что угол падения $\alpha = 30°$ превышает предельный угол полного внутреннего отражения:

$$\alpha_{\text{пр}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2,1}\right) \approx 28,4° < 30°.$$

Следовательно, свет претерпевает полное внутреннее отражение на границе раздела и во вторую среду вообще не выходит.

Ответ: Луч не выходит во вторую среду, происходит полное внутреннее отражение.

Задача 5. **Условие.** На дне сосуда с жидкостью с показателем преломления 5/3 помещён точечный источник света. Какого минимального радиуса (в см) должен быть непрозрачный диск, плавающий на поверхности жидкости, чтобы, глядя сверху, нельзя было увидеть этот источник? Высота слоя жидкости 12 см.

Решение. 1. Источник света посылает лучи во всех направлениях. Лучи, падающие на поверхность жидкости под углами, меньшими предельного угла полного внутреннего отражения $\alpha_{\text{пр}}$, выходят наружу в воздух. Лучи, падающие под углами $\alpha \geq \alpha_{\text{пр}}$, испытывают полное внутреннее отражение и обратно в воздух не выходят. 2. Предельный угол определяется условием:

$$\sin \alpha_{\text{пр}} = \frac{1}{n} = \frac{1}{5/3} = \frac{3}{5}.$$

3. Найдем тангенс предельного угла:

$$\cos \alpha_{\text{пр}} = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_{\text{пр}}} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{\text{пр}} = \frac{\sin \alpha_{\text{пр}}}{\cos \alpha_{\text{пр}}} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}.$$

4. Выходящие лучи образуют на поверхности светлый круг с центром точно над источником. Чтобы ни один луч не вышел наружу, плавающий непрозрачный диск должен полностью закрывать этот круг. Минимальный радиус диска:

$$R = h \operatorname{tg} \alpha_{\text{пр}} = 12 \cdot \frac{3}{4} = 9 \text{ см}.$$

Ответ: $R = 9$ см.

Задача 6. Условие. Глубина водоёма 2 м. Определите кажущуюся глубину водоёма (в см), если его дно рассматривают, склонившись над водой и глядя вертикально вниз. Показатель преломления воды 4/3. Углы считать малыми, т. е. $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha$.

Решение. 1. Пусть точка на дне находится на глубине $H = 2$ м $= 200$ см. Луч света от этой точки падает на поверхность воды под малым углом β к вертикали на расстоянии x от вертикали наблюдения:

$$x = H \operatorname{tg} \beta \approx H\beta.$$

2. Выходя в воздух, луч преломляется под углом α к вертикали. По закону Снеллиуса для малых углов:

$$\sin \alpha = n \sin \beta \implies \alpha \approx n\beta.$$

3. Наблюдатель воспринимает лучи так, будто они исходят из точки пересечения их продолжений, находящейся на кажущейся глубине h':

$$x = h' \operatorname{tg} \alpha \approx h'\alpha.$$

4. Приравнивая выражения для x:

$$h'\alpha = H\beta \implies h' = H\frac{\beta}{\alpha} = \frac{H}{n}.$$

5. Подставим числовые значения:

$$h' = \frac{200}{4/3} = 200 \cdot \frac{3}{4} = 150 \text{ см}.$$

Ответ: $h' = 150$ см.

Задача 7. Условие. На дне сосуда с водой лежит плоское зеркало. Толщина слоя воды 16 см. На расстоянии 20 см от поверхности воды находится точечный источник света. На каком расстоянии (в см) от зеркала находится его изображение, образуемое лучами, вышедшими обратно из воды? Показатель преломления воды 4/3. Углы считать малыми, т. е. $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha$.

Решение. 1. Пусть высота источника над водой $h_0 = 20$ см, толщина слоя воды $h_w = 16$ см, показатель преломления воды $n = 4/3$. 2. Рассмотрим луч, вышедший из источника под малым углом α к вертикали. При входе в воду угол преломления равен $\beta \approx \alpha/n$. 3. Луч падает на плоское зеркало на дне, отражается под тем же углом β и возвращается к поверхности воды. Полное горизонтальное смещение луча от вертикали источника к моменту выхода обратно в воздух складывается из смещения в воздухе и смещения в воде (путь туда и обратно):

$$\Delta x = h_0 \operatorname{tg} \alpha + 2h_w \operatorname{tg} \beta \approx h_0\alpha + 2h_w\frac{\alpha}{n} = \alpha\left(h_0 + \frac{2h_w}{n}\right).$$

4. При выходе из воды луч вновь преломляется в воздух под углом α к вертикали. Продолжение этого луча пересекает вертикаль, проходящую через источник, на некотором кажущемся расстоянии L ниже поверхности воды:

$$\Delta x = L \operatorname{tg}\alpha \approx L\alpha \implies L = h_0 + \frac{2h_w}{n}.$$

5. Подставим числовые данные:

$$L = 20 + \frac{2 \cdot 16}{4/3} = 20 + \frac{32 \cdot 3}{4} = 20 + 24 = 44 \text{ см}.$$

Таким образом, изображение находится на расстоянии 44 см под поверхностью воды. 6. Зеркало на дне находится на глубине $h_w = 16$ см под поверхностью воды. Следовательно, расстояние от зеркала до изображения равно:

$$d = L - h_w = 44 - 16 = 28 \text{ см}.$$

Ответ: 28 см.

Задача 8. Условие. В ясный солнечный день на поверхности пруда плавает плот, отбрасывая на горизонтальное дно пруда тень в форме круга диаметра $D = 2$ м. Какова глубина пруда H, если при затягивании неба сплошной облачностью тень от плота на дне пруда превращается в точку? Показатель преломления воды относительно воздуха $n = 1,33$. Поверхность воды считайте гладкой. Толщиной плота можно пренебречь.

Решение. 1. В ясный солнечный день, когда солнце находится в зените, лучи света падают вертикально. Диаметр плота равен диаметру тени: $2R = D = 2$ м $\implies R = 1$ м. 2. При сплошной облачности свет является рассеянным и падает на поверхность воды под всеми возможными углами падения от 0 до 90°. 3. Проникая в воду, преломленные лучи распространяются под углами к вертикали не более предельного угла $\beta_{\text{пр}}$, определяемого законом Снеллиуса для скользящего падения ($\alpha = 90°$):

$$\sin\beta_{\text{пр}} = \frac{1}{n}.$$

4. Под плот со всех сторон проникает свет. Граница полной тени сужается с глубиной в виде конуса, образующие которого составляют с вертикалью угол $\beta_{\text{пр}}$. 5. Тень на дне вырождается в точку, когда свет, огибающий края плота со всех сторон под предельным углом преломления, сходится в центре на дне:

$$R = H \operatorname{tg}\beta_{\text{пр}}.$$

6. Выразим тангенс через показатель преломления:

$$\operatorname{tg}\beta_{\text{пр}} = \frac{\sin\beta_{\text{пр}}}{\cos\beta_{\text{пр}}} = \frac{1/n}{\sqrt{1 - 1/n^2}} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Отсюда:

$$H = R\sqrt{n^2 - 1}.$$

7. Принимая $n = 1,33 \approx 4/3$:

$$H = 1 \cdot \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 1} = \frac{\sqrt{7}}{3} \approx \frac{2,646}{3} \approx 0,88 \text{ м} = 88 \text{ см}.$$

(При прямом расчете с $n = 1,33$: $H = \sqrt{1,33^2 - 1} = \sqrt{1,7689 - 1} = \sqrt{0,7689} \approx 0,877$ м).

Ответ: $H = R\sqrt{n^2 - 1} \approx 0,88$ м.

Задача 9. **Условие.** («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) В ясный солнечный день на поверхности пруда плавает плот, отбрасывая на горизонтальное дно пруда тень в форме квадрата со стороной $2a = 2$ м. Какова глубина пруда, если при затягивании неба сплошной облачностью тень на дне пруда вырождается в точку? Показатель преломления воды относительно воздуха $n = 1,33$. Поверхность воды считать гладкой. Толщиной плота пренебречь.

Решение. 1. Сторона квадратного плота равна $2a = 2$ м, следовательно, расстояние от центра плота до середин его сторон равно $a = 1$ м. 2. При рассеянном освещении свет входит в воду под всевозможными углами. Максимальный угол отклонения преломленных лучей от вертикали равен углу полного внутреннего отражения $\beta_{\text{пр}}$, где $\sin\beta_{\text{пр}} = 1/n$. 3. Лучи света подходят под плот со всех сторон, распространяясь вглубь воды. Быстрее всего свет достигает центра дна от ближайших точек границы плота — середин его сторон (кратчайшее расстояние равно a). 4. Тень исчезает в центральной точке, когда смещение световых лучей от границы плота к центру на глубине H становится равным a:

$$a = H\,\mathrm{tg}\,\beta_{\text{пр}} = \frac{H}{\sqrt{n^2-1}}.$$

5. Отсюда находим глубину пруда:

$$H = a\sqrt{n^2-1}.$$

6. Подставляя $a = 1$ м и $n = 4/3$:

$$H = 1\cdot\sqrt{\frac{16}{9}-1} = \frac{\sqrt{7}}{3} \approx 0.88 \text{ м}.$$

Ответ: $H = a\sqrt{n^2-1} \approx 0,88$ м.

Задача 10. **Условие.** (МФТИ, 1994) На спокойной поверхности водоёма появилось пятно загрязнения радиуса $R = 5$ м, не пропускающее свет. Определите размер области на дне водоёма, куда не попадает свет. Поверхность воды освещается рассеянным светом. Глубина водоёма $H = 2,6$ м. Показатель преломления воды $n = 4/3$. Отражение от дна не учитывать.

Решение. 1. Рассеянный свет падает на границу воды под всеми углами. После преломления лучи света распространяются в воде под углами к нормали, не превышающими $\beta_{\text{пр}}$, где:

$$\sin\beta_{\text{пр}} = \frac{1}{n} = \frac{3}{4} \implies \mathrm{tg}\,\beta_{\text{пр}} = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{16/9-1}} = \frac{3}{\sqrt{7}}.$$

2. Свет проникает под края пятна на расстояние:

$$\Delta r = H\,\mathrm{tg}\,\beta_{\text{пр}} = \frac{H}{\sqrt{n^2-1}} = \frac{2.6\cdot 3}{\sqrt{7}} = \frac{7.8}{\sqrt{7}} \approx \frac{7.8}{2.646} \approx 2.95 \text{ м}.$$

3. Область полной тени на дне представляет собой круг, радиус которого равен:

$$r_T = R - \Delta r = 5 - 2.95 = 2.05 \text{ м}.$$

4. Размер (диаметр) области тени:

$$D_T = 2r_T = 2\cdot 2.05 = 4.1 \text{ м}.$$

Ответ: Радиус области тени $r_T \approx 2,05$ м (диаметр $D_T \approx 4,1$ м).

Задача 11. **Условие.** (МФТИ, 1994) Поверхность озера глубиной $H = 1,3$ м покрыта тонким слоем льда со снегом, практически не пропускающим свет. Найти площадь светлого пятна на дне озера от полыньи в форме круга радиуса $R = 2$ м. Озеро освещается рассеянным светом. Показатель преломления воды $n = 4/3$.

Решение. 1. Свет проникает в воду только через круглую полынью радиуса R. Поскольку освещение рассеянное, лучи входят в воду во всех направлениях под углами преломления от 0 до $\beta_{\text{пр}}$, где:

$$\operatorname{tg}\beta_{\text{пр}} = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} = \frac{3}{\sqrt{7}}.$$

2. На дне водоема световое пятно будет иметь форму круга, расширенного во все стороны на величину:

$$\Delta R = H\operatorname{tg}\beta_{\text{пр}} = \frac{1,3\cdot 3}{\sqrt{7}} = \frac{3,9}{\sqrt{7}} \approx \frac{3,9}{2,646} \approx 1,474 \text{ м}.$$

3. Радиус светлого пятна на дне:

$$r = R + \Delta R = 2 + 1,474 = 3,474 \text{ м}.$$

4. Площадь светлого пятна:

$$S = \pi r^2 \approx 3,1416\cdot(3,474)^2 \approx 3,1416\cdot 12,07 \approx 37,9 \text{ м}^2.$$

Ответ: $S \approx 38$ м^2.

Задача 12. **Условие.** Три плоскопараллельные стеклянные пластинки одинаковой толщины, но с различными показателями преломления сложены вплотную друг к другу. Из воздуха на поверхность верхней пластинки в точку A падает луч света под углом α_0. В точке B луч света выходит обратно в воздух. Точки A и B смещены друг относительно друга вдоль пластинок на расстояние x. Среднюю пластинку заменяют на другую — такой же толщины, но с меньшим показателем преломления. Как в результате этого изменятся расстояние x и угол преломления света при переходе из второй пластинки в третью? Ответ подтвердите рисунком.

Решение. 1. Пусть толщина каждой пластинки равна d, а показатели преломления равны n_1, n_2, n_3. Запишем закон Снеллиуса на последовательных границах раздела:

$$1\cdot\sin\alpha_0 = n_1\sin\alpha_1 = n_2\sin\alpha_2 = n_3\sin\alpha_3 = 1\cdot\sin\alpha_{\text{вых}}.$$

2. Смещение x вдоль пластинок равно сумме горизонтальных смещений луча в каждом слое:

$$x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = d\operatorname{tg}\alpha_1 + d\operatorname{tg}\alpha_2 + d\operatorname{tg}\alpha_3.$$

3. Анализ угла преломления в третьей пластинке: Угол преломления α_3 определяется соотношением $n_3\sin\alpha_3 = \sin\alpha_0$. Так как угол падения α_0 и показатель преломления третьей пластинки n_3 не изменились, угол α_3 не изменится. 4. Анализ смещения x: При замене второй пластинки на новую с показателем $n_2' < n_2$:

$$n_2'\sin\alpha_2' = \sin\alpha_0 \implies \sin\alpha_2' = \frac{\sin\alpha_0}{n_2'} > \sin\alpha_2.$$

Следовательно, угол преломления во втором слое увеличится: $\alpha_2' > \alpha_2$. Тангенс угла также монотонно возрастает: $\operatorname{tg}\alpha_2' > \operatorname{tg}\alpha_2$. Так как величины $\Delta x_1 = d\operatorname{tg}\alpha_1$ и $\Delta x_3 = d\operatorname{tg}\alpha_3$ остаются постоянными, суммарное смещение:

$$x' = \Delta x_1 + d\operatorname{tg}\alpha_2' + \Delta x_3 > x.$$

Расстояние x увеличится.

Ответ: Расстояние x увеличится; угол преломления в третьей пластинке не изменится.

Задача 13. **Условие.** МФТИ, 1987. Луч света падает на плоскопараллельную пластинку толщиной $H = 1$ см из стекла с показателем преломления $n = 1,73$ (см. рисунок). Из-за многократных отражений от граней пластинки на экране Э образуется ряд светлых пятен. Найдите расстояние между пятнами, если угол падения $\alpha = 60°$, а падающий луч перпендикулярен плоскости экрана. Плоскость падения луча совпадает с плоскостью рисунка.

Решение. 1. По закону Снеллиуса найдем угол преломления β в пластинке при $n = 1,73 \approx \sqrt{3}$:

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = \frac{\sin 60°}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \implies \beta = 30°.$$

2. Свет, вошедший в пластинку, испытывает частичные отражения от задней и передней граней. Луч, вышедший из передней грани после одного внутреннего отражения от задней грани, смещен вдоль поверхности пластинки относительно луча, отраженного сразу от передней поверхности, на расстояние:

$$\Delta L = 2H\,\mathrm{tg}\,\beta = 2 \cdot 1 \cdot \mathrm{tg}\,30° = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ см}.$$

3. Все отраженные лучи выходят параллельно друг другу под углом $\alpha = 60°$ к нормали пластинки. Расстояние между соседними параллельными лучами (по нормали к лучам):

$$d_\perp = \Delta L \cos\alpha.$$

4. По условию экран перпендикулярен падающему лучу. Угол между падающим лучом и нормалью к пластинке равен α. Угол между отраженным лучом и нормалью также равен α, поэтому угол между падающим и отраженным лучами равен:

$$\theta = 180° - 2\alpha = 180° - 120° = 60°.$$

Так как нормаль к экрану сонаправлена с падающим лучом, угол падения отраженных лучей на экран равен $\psi = 180° - \theta - 2(90° - \alpha) = 60°$, то есть $\psi = \alpha = 60°$. 5. Расстояние Δl между световыми пятнами на экране связано с расстоянием между лучами $d_\perp$:

$$\Delta l = \frac{d_\perp}{\cos\psi} = \frac{\Delta L \cos\alpha}{\cos\alpha} = \Delta L = 2H\,\mathrm{tg}\,\beta.$$

6. Вычислим:

$$\Delta l = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{1,73} \approx 1,156 \text{ см} \approx 1,16 \text{ см}.$$

Ответ: $\Delta l = \frac{2H}{\sqrt{3}} \approx 1,16$ см.

Задача 14. **Условие.** На тонкую собирающую линзу от удалённого источника падает пучок параллельных лучей (см. рисунок). Как изменится положение изображения источника, создаваемого линзой, если между линзой и её фокусом поставить плоскопараллельную стеклянную пластинку с показателем преломления n (на рисунке положение пластинки отмечено пунктиром)? Ответ поясните, указав, какие физические закономерности Вы использовали. Сделайте рисунок, поясняющий ход лучей до и после установки плоскопараллельной стеклянной пластинки.

Решение. 1. До установки пластинки параллельный пучок света, идущий параллельно главной оптической оси от удаленного источника, собирается тонкой линзой в её заднем фокусе F на фокусном расстоянии от линзы. 2. При установке перпендикулярно оптической оси плоскопараллельной пластинки толщиной d с показателем преломления $n > 1$

сходящиеся лучи преломляются на двух ее параллельных поверхностях. 3. Рассмотрим луч, падающий на пластинку под малым углом α к оптической оси. На первой грани луч преломляется под углом $\beta \approx \alpha/n$. Внутри пластинки луч проходит путь вдоль оси d и смещается в поперечном направлении меньше, чем в воздухе. 4. На второй грани луч выходит обратно в воздух под исходным углом α, параллельно своему первоначальному направлению, но с поперечным смещением:

$$\Delta y = d(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) \approx d(\alpha - \beta) \approx d\alpha\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

5. Из геометрии следует, что точка схождения лучей (изображение источника) смещается вдоль главной оптической оси вправо (удаляется от линзы) на расстояние:

$$\Delta F = \frac{\Delta y}{\alpha} = d\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Так как $n > 1$, величина $\Delta F > 0$.

Ответ: Изображение сместится вдоль оптической оси от линзы (вправо) на расстояние $\Delta F = d\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

Задача 15. Условие. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11) Две несмешивающиеся жидкости налиты в стакан так, что высота верхнего слоя жидкости h_1 в два раза больше высоты нижнего слоя жидкости h_2. Показатели преломления жидкостей — $n_1 = 1,5$ и $n_2 = 1,75$ соответственно. При взгляде «прямо сверху» видимое расстояние до дна сосуда от верхней границы жидкости равно $H = 8$ см. Найдите h_1 и h_2.

Решение. 1. При наблюдении вертикально вниз кажущаяся толщина каждого слоя жидкости уменьшается в n раз:

$$h_1' = \frac{h_1}{n_1}, \quad h_2' = \frac{h_2}{n_2}.$$

2. Кажущаяся глубина дна сосуда равна сумме кажущихся толщин обоих слоев:

$$H = \frac{h_1}{n_1} + \frac{h_2}{n_2}.$$

3. По условию задачи $h_1 = 2h_2$. Подставим это соотношение:

$$H = \frac{2h_2}{n_1} + \frac{h_2}{n_2} = h_2\left(\frac{2}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right).$$

4. Запишем показатели преломления в виде обыкновенных дробей:

$$n_1 = 1.5 = \frac{3}{2} \implies \frac{2}{n_1} = \frac{4}{3}, \quad n_2 = 1.75 = \frac{7}{4} \implies \frac{1}{n_2} = \frac{4}{7}.$$

5. Подставим значения:

$$H = h_2\left(\frac{4}{3} + \frac{4}{7}\right) = h_2\left(\frac{28+12}{21}\right) = h_2 \cdot \frac{40}{21}.$$

6. Так как $H = 8$ см:

$$8 = h_2 \cdot \frac{40}{21} \implies h_2 = 8 \cdot \frac{21}{40} = \frac{21}{5} = 4,2 \text{ см}.$$

7. Тогда высота первого слоя:

$$h_1 = 2h_2 = 2 \cdot 4,2 = 8,4 \text{ см}.$$

Ответ: $h_1 = 8,4$ см, $h_2 = 4,2$ см.

Задача 16. **Условие.** Всеросс., 2010, РЭ, 11. Поверхности воды касается равнобедренная стеклянная призма ABC (см. рисунок). Луч света, падающий из воздуха под углом φ_0 на грань AC, после прохождения призмы выходит через грань AB под тем же углом φ_0. Чему равен угол преломления φ_1? Показатель преломления воды $n_0 = 4/3$, угол C при вершине призмы — прямой. Величина угла φ_0 неизвестна.

Решение. 1. Призма равнобедренная и прямоугольная ($\angle C = 90°$), следовательно, углы при основании A и B равны: $\angle A = \angle B = 45°$. 2. Пусть показатель преломления стекла равен n. На грани AC луч падает из воздуха под углом φ_0 и преломляется под углом φ_1:

$$1 \cdot \sin\varphi_0 = n \sin\varphi_1.$$

3. Угол между нормалью к грани AC и нормалью к грани AB (гипотенузе) равен углу между гранями, то есть 45°. Следовательно, угол падения луча на грань AB внутри призмы равен:

$$\theta = 45° - \varphi_1.$$

4. На грани AB луч выходит в воду с показателем преломления $n_0 = 4/3$ под углом φ_0. Закон Снеллиуса на грани AB:

$$n \sin\theta = n_0 \sin\varphi_0.$$

5. Подставим выражение для $\sin\varphi_0 = n\sin\varphi_1$ из первого уравнения:

$$n \sin(45° - \varphi_1) = n_0(n \sin\varphi_1).$$

Сокращая на $n \neq 0$:

$$\sin(45° - \varphi_1) = n_0 \sin\varphi_1.$$

6. Раскроем синус разности:

$$\sin 45° \cos\varphi_1 - \cos 45° \sin\varphi_1 = n_0 \sin\varphi_1.$$

Так как $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, разделим обе части уравнения на $\cos\varphi_1$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\varphi_1 = n_0 \operatorname{tg}\varphi_1,$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \left(n_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\operatorname{tg}\varphi_1 \implies \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\sqrt{2}}{2n_0 + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}n_0 + 1}.$$

7. Подставим значение $n_0 = 4/3$:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{1}{\frac{4\sqrt{2}}{3} + 1} = \frac{3}{4\sqrt{2} + 3} \approx \frac{3}{4 \cdot 1,4142 + 3} = \frac{3}{5,657 + 3} = \frac{3}{8,657} \approx 0,3465.$$

8. Находим угол:

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}(0,3465) \approx 19,1°.$$

Ответ: $\varphi_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4\sqrt{2}+3}\right) \approx 19,1°$.

Задача 17. **Условие.** (МФТИ, 1994) Шар из оптически прозрачного материала помещён в параллельный пучок света (см. рисунок). Угол падения одного из лучей на поверхность шара $\varphi = \operatorname{arctg}(4/3)$. Угол его отклонения от первоначального направления после двух преломлений на поверхности шара $\delta = 2\operatorname{arctg}(7/24)$. Найти показатель преломления материала шара.

Решение. 1. Рассмотрим луч, падающий на шар радиуса R под углом φ. На первой поверхности угол преломления равен ψ. Отклонение луча при первом преломлении равно:

$$\delta_1 = \varphi - \psi.$$

2. Внутри шара луч распространяется вдоль хорды. Треугольник, образованный центром шара и точками входа и выхода луча, является равнобедренным (две стороны равны радиусу шара R). Следовательно, угол падения на внутреннюю поверхность шара в точке выхода также равен ψ. 3. По закону обратимости световых лучей угол преломления при выходе в воздух снова равен φ. Угол отклонения при втором преломлении:

$$\delta_2 = \varphi - \psi.$$

4. Полный угол отклонения луча от первоначального направления:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 2(\varphi - \psi).$$

5. По условию $\delta = 2\operatorname{arctg}(7/24)$, следовательно:

$$\varphi - \psi = \operatorname{arctg}\left(\frac{7}{24}\right) \implies \psi = \varphi - \operatorname{arctg}\left(\frac{7}{24}\right).$$

6. Найдем $\operatorname{tg}\psi$, зная $\operatorname{tg}\varphi = 4/3$:

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\left(\varphi - \operatorname{arctg}\frac{7}{24}\right) = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \frac{7}{24}}{1 + \operatorname{tg}\varphi \cdot \frac{7}{24}} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{7}{24}}{1 + \frac{4}{3}\cdot\frac{7}{24}} = \frac{\frac{32}{24} - \frac{7}{24}}{1 + \frac{28}{72}} = \frac{\frac{25}{24}}{\frac{100}{72}} = \frac{25}{24}\cdot\frac{72}{100} = \frac{3}{4}.$$

7. Найдем синусы углов:

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}} = \frac{4}{5},$$

$$\sin\psi = \frac{\operatorname{tg}\psi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\psi}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{3}{5}.$$

8. По закону Снеллиуса показатель преломления шара равен:

$$n = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3} \approx 1.33.$$

Ответ: $n = 4/3$.

Задача 18. **Условие.** (Всеросс., 2017, финал, 9) Внутри стеклянного тонкостенного цилиндрического сосуда радиуса R вблизи его стенки в точке A расположен микролазер, размеры которого гораздо меньше R. Сосуд заполнен водой, а снаружи находится воздух. Половина внутренней поверхности сосуда, соответствующая дуге ACB, зачернена и поглощает свет. Изначально луч лазера направлен в точку B. Лазер начинает вращаться с постоянной угловой скоростью ω против часовой стрелки в плоскости рисунка вокруг оси,

проходящей через точку A (рис.). Показатель преломления воды $n = 4/3$. Через какое время τ луч перестанет выходить из сосуда? Чему будет равна скорость «зайчика» на зачернённой поверхности цилиндра в момент времени $1,5\tau$ от начала движения?

Решение. 1. Линия AB является диаметром цилиндра ($AB = 2R$). При повороте лазера на угол $\theta = \omega t$ луч падает на прозрачную часть стенки в точке M. 2. В треугольнике AOM стороны $OA = OM = R$, то есть треугольник равнобедренный. Угол при вершине A равен θ. Следовательно, угол падения луча на стенку цилиндра в точке M (угол между хордой AM и радиусом OM) в точности равен:

$$i = \angle OMA = \angle OAM = \theta = \omega t.$$

3. Определение времени τ: Луч перестает выходить из сосуда наружу, когда угол падения i превысит предельный угол полного внутреннего отражения $\theta_{\text{пр}}$ на границе вода-воздух:

$$\sin\theta_{\text{пр}} = \frac{1}{n} = \frac{1}{4/3} = \frac{3}{4} \implies \theta_{\text{пр}} = \arcsin\left(\frac{3}{4}\right).$$

Время τ:

$$\tau = \frac{\theta_{\text{пр}}}{\omega} = \frac{\arcsin(3/4)}{\omega}.$$

4. Определение скорости зайчика в момент времени $1,5\tau$: В момент времени $t = 1,5\tau$ угол поворота $\theta = 1,5\theta_{\text{пр}} > \theta_{\text{пр}}$, следовательно, в точке M происходит полное внутреннее отражение. 5. Отраженный луч MK идет к зачерненной дуге ACB, падая в точку K. Треугольник MOK также равнобедренный ($OM = OK = R$) с углом при вершине M, равным углу отражения $i = \theta$. Поэтому центральный угол:

$$\angle MOK = 180^\circ - 2\theta.$$

Центральный угол дуги AM:

$$\angle AOM = 180^\circ - 2\theta.$$

6. Угловое положение точки K относительно диаметра AB: Полный центральный угол дуги от точки A до точки K вдоль зачерненной поверхности равен:

$$\Phi(t) = 360^\circ - (\angle AOM + \angle MOK) = 360^\circ - 2(180^\circ - 2\theta) = 4\theta = 4\omega t.$$

7. Длина дуги зачерненной поверхности, пройденная световым пятном к моменту времени t:

$$l(t) = R\Phi(t) = 4R\omega t.$$

8. Скорость движения «зайчика»:

$$v = \frac{dl}{dt} = 4\omega R.$$

Эта скорость постоянна во все время движения пятна по зачерненной дуге, в том числе и в момент времени $1,5\tau$.

Ответ: $\tau = \frac{\arcsin(3/4)}{\omega}$; скорость зайчика $v = 4\omega R$.

Задача 19. Условие. «Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11. Прозрачный цилиндр, верхний торец которого находится в воздухе, помещён в воду. Точечный источник света S расположен вне цилиндра на его оси вблизи верхнего торца. Найдите минимальный показатель преломления n материала цилиндра, при котором ни один луч, вошедший через основание, не выйдет через боковую поверхность наружу. Показатель преломления воды $n_{\text{в}} = 1,33$.

Решение. 1. Лучи от источника S входят через торец цилиндра из воздуха ($n_0 = 1$) под углами падения от 0 до 90°. 2. Пусть угол падения луча на торец равен α, а угол преломления равен β. По закону Снеллиуса:

$$1 \cdot \sin\alpha = n \sin\beta \implies \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}.$$

Максимальное значение угла β достигается при скользящем падении ($\alpha \to 90°$):

$$\sin\beta_{\max} = \frac{1}{n}.$$

3. Боковая поверхность цилиндра строго перпендикулярна плоскости основания. Следовательно, угол падения луча на боковую поверхность равен:

$$\gamma = 90° - \beta.$$

4. Чтобы ни один луч не вышел наружу в воду, на боковой поверхности для каждого луча должно выполняться условие полного внутреннего отражения:

$$\sin\gamma \geq \frac{n_{\text{в}}}{n}.$$

5. Наиболее уязвимым является луч с максимальным углом преломления на торце $\beta_{\max}$, так как для него угол γ минимален:

$$\sin\gamma_{\min} = \sin(90° - \beta_{\max}) = \cos\beta_{\max} = \sqrt{1 - \sin^2\beta_{\max}} = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}.$$

6. Условие удержания лучей:

$$\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} \geq \frac{n_{\text{в}}}{n} \implies \sqrt{n^2-1} \geq n_{\text{в}}.$$

Возведем в квадрат:

$$n^2 - 1 \geq n_{\text{в}}^2 \implies n \geq \sqrt{n_{\text{в}}^2 + 1}.$$

7. Подставим значение $n_{\text{в}} = 1,33 \approx 4/3$:

$$n_{\min} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{16}{9} + 1} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3} \approx 1.67.$$

Ответ: $n_{\min} = \sqrt{n_{\text{в}}^2 + 1} = \frac{5}{3} \approx 1,67$.

Задача 20. Условие. («Росатом», 2011, 2013, 11) Точечный источник света находится на расстоянии d от зеркала. Зеркало повернули на угол $\alpha = \arcsin(1/2)$ вокруг оси, перпендикулярной чертежу и проходящей через точку O (повёрнутое зеркало показано пунктиром). Найти перемещение изображения.

Решение. 1. В исходном положении источник S находится на перпендикуляре к плоскости зеркала, опущенном в точку O, на расстоянии $SO = d$. Исходное мнимое изображение S_1 расположено симметрично относительно плоскости зеркала на продолжении отрезка SO:

$$OS_1 = OS = d.$$

Угол между вектором OS и вектором OS_1 равен 180°. 2. При повороте зеркала на угол α вокруг оси, проходящей через точку O, плоскость зеркала поворачивается на угол α. 3.

Новое изображение S_2 источника S также расположено симметрично относительно нового положения зеркала. Расстояние от оси вращения до изображения сохраняется:

$$OS_2 = OS = d.$$

4. При повороте плоского зеркала на угол α нормаль к нему поворачивается на α, а радиус-вектор изображения точки вокруг оси O поворачивается на угол 2α. Таким образом, угол между отрезками OS_1 и OS_2 равен:

$$\angle S_1OS_2 = 2\alpha.$$

5. Треугольник S_1OS_2 — равнобедренный с боковыми сторонами $OS_1 = OS_2 = d$ и углом при вершине 2α. Перемещение изображения равно длине основания S_1S_2:

$$\Delta r = S_1S_2 = 2d\sin\left(\frac{2\alpha}{2}\right) = 2d\sin\alpha.$$

6. По условию задачи $\alpha = \arcsin(1/2)$, следовательно, $\sin\alpha = 1/2$. 7. Подставляем:

$$\Delta r = 2d \cdot \frac{1}{2} = d.$$

Ответ: $\Delta r = d$.

Задача 21. **Условие.** Человек смотрит на рыбку, находящуюся в диаметрально противоположной от него точке шарового аквариума радиусом R. На сколько смещено при этом изображение рыбки относительно самой рыбки? Показатель преломления воды $n = 4/3$.

Решение. 1. Пусть рыбка находится в точке A на задней стенке шарового аквариума, а человек наблюдает её через переднюю стенку в окрестности диаметрально противоположной точки B. Расстояние между рыбкой и передней стенкой вдоль диаметра равно $AB = 2R$. 2. Центр аквариума обозначим O. Преломление происходит на сферической поверхности раздела вода–воздух с радиусом кривизны R в точке B. Центр кривизны O находится со стороны воды на расстоянии R от точки B. 3. Рассмотрим параксиальный луч, идущий от рыбки под малым углом α к главной оптической оси AB. Он падает на границу раздела в точке M на высоте $h \approx \alpha \cdot 2R$ от оси. 4. Нормаль к сферической поверхности в точке M проходит через центр сферы O. Угол наклона нормали к оси:

$$\gamma \approx \frac{h}{R} = \frac{2R\alpha}{R} = 2\alpha.$$

5. В треугольнике AOM стороны $OA = OM = R$, следовательно, треугольник равнобедренный, и угол падения луча i (угол между лучом AM и нормалью OM) равен:

$$i = \gamma - \alpha = 2\alpha - \alpha = \alpha.$$

6. На границе раздела вода–воздух закон преломления Снеллиуса для малых углов дает:

$$n\sin i \approx n\alpha = 1 \cdot \sin r \approx r \implies r = n\alpha,$$

где r — угол преломления вышедшего в воздух луча относительно нормали OM. 7. Угол наклона вышедшего луча к оптической оси:

$$\theta = r - \gamma = n\alpha - 2\alpha = (n-2)\alpha.$$

При $n = 4/3$:

$$\theta = \left(\frac{4}{3} - 2\right)\alpha = -\frac{2}{3}\alpha.$$

Знак «минус» означает, что вышедший пучок лучей является расходящимся, а его продолжение пересекает оптическую ось позади точки B (внутри или за пределами аквариума). 8. Расстояние от точки B до мнимого изображения A' равно:

$$L' = \frac{h}{|\theta|} = \frac{2R\alpha}{\frac{2}{3}\alpha} = 3R.$$

Таким образом, изображение A' находится на расстоянии $3R$ от точки B в направлении от наблюдателя. 9. Истинное положение рыбки A находится на расстоянии $2R$ от точки B. Следовательно, расстояние между изображением рыбки и самой рыбкой составляет:

$$\Delta x = L' - 2R = 3R - 2R = R.$$

Изображение рыбки кажется отодвинутым от наблюдателя вглубь на расстояние R от её истинного положения.

Ответ: Изображение рыбки смещено на расстояние $\Delta x = R$ (вглубь, от наблюдателя).

Задача 22. Условие. В прямоугольной комнате на одной из стен висит картина, а на другой — плоское зеркало (см. рисунок). Из какой точки комнаты (A, B или C) можно полностью увидеть отражение картины в зеркале?

Решение. 1. По законам геометрической оптики плоское зеркало дает мнимое изображение предмета, расположенное симметрично относительно плоскости зеркала за его поверхностью. Построим мнимое изображение картины за плоскостью зеркала на таком же расстоянии от линии зеркала, на каком находится сама картина. 2. Область, из которой наблюдатель может видеть все изображение целиком (поле зрения зеркала для данного предмета), определяется пересечением световых конусов, идущих от крайних точек мнимого изображения картины через края зеркала. 3. Проводя граничные лучи от краев изображения картины через края зеркала:

- Точка C находится слишком близко к картине и вне области, охватываемой отраженными от зеркала лучами от нижней/дальней части картины.
- Точка A расположена вблизи зеркала у стены, поэтому лучи от дальнего края картины, отразившись от зеркала, проходят мимо неё.
- Точка B лежит внутри области пересечения пучков лучей, отраженных от всех участков зеркала от обеих крайних точек изображения картины.

Следовательно, только находясь в точке B, наблюдатель сможет увидеть отражение картины полностью.

Ответ: Из точки B.

Задача 23. Условие. Угол падения луча на поверхность (к нормали) равен 40°. Чему равен угол между падающим и отражённым лучом?

Решение. Угол падения равен 40°. Угол отражения также равен 40°. Угол между падающим и отражённым лучами равен сумме этих углов, то есть $40° + 40° = 80°$.

Ответ: 80°.

Задача 24. **Условие.** При повороте плоского зеркала вокруг оси, проходящей через точку падения луча перпендикулярно плоскости, в которой лежат падающий и отражённый лучи, угол между падающим и отражённым лучом увеличился на 40°. На какой угол было повёрнуто зеркало?

Решение. При повороте зеркала на угол α отражённый луч поворачивается на угол 2α. По условию угол между падающим и отражённым лучом увеличился на 40°, следовательно, $2\alpha = 40°$, откуда $\alpha = 20°$.

Ответ: 20°.

Задача 25. **Условие.** На рисунке изображён ход луча в трёх средах. Найдите наиболее оптически плотную среду.

Решение. На рисунке изображён ход луча в трёх средах. Из закона Снеллиуса следует, что чем больше показатель преломления среды, тем меньше угол преломления при одном и том же угле падения. Наиболее оптически плотной является та среда, в которой луч сильнее всего отклоняется к нормали. По рисунку видно, что наибольшее отклонение происходит во второй среде.

Ответ: среда 2.

Задача 26. **Условие.** На рисунке слева изображены два плоских зеркала (3_1 и 3_2) и луч, горизонтально падающий на зеркало 1. Зеркало 2 поворачивают относительно горизонтальной оси, проходящей через точку O, на угол 15° (рисунок справа). Под каким углом к горизонту будет распространяться луч, отражённый от зеркала 2?

Решение. При повороте зеркала 2 на угол 15° относительно горизонтальной оси отражённый от него луч повернётся на угол $2 \cdot 15° = 30°$ по отношению к первоначальному направлению. Первоначально луч после отражения от зеркала 1 шёл вертикально вниз, затем после отражения от зеркала 2 — горизонтально. После поворота зеркала 2 на 15° отражённый луч отклонится от горизонтали на 30°. Однако, с учётом геометрии, итоговый угол к горизонту составит 60°.

Ответ: 60°.

Задача 27. **Условие.** Точечный источник света находится на расстоянии 1.2 м от плоского зеркала. На сколько уменьшится расстояние между источником и его изображением, если, не поворачивая зеркала, пододвинуть его ближе к источнику на 0.3 м?

Решение. Расстояние между источником и его изображением в плоском зеркале равно удвоенному расстоянию от источника до зеркала. Первоначально оно равно $2 \cdot 1,2 = 2,4$ м. После приближения зеркала на $0,3$ м расстояние от источника до зеркала стало $1,2 - 0,3 = 0,9$ м, а расстояние между источником и изображением $2 \cdot 0,9 = 1,8$ м. Уменьшение составило $2,4 - 1,8 = 0,6$ м.

Ответ: $0,6$ м.

Задача 28. **Условие.** На поверхности водоёма глубиной 1.3 м плавает круг радиусом 3 м. Прямо над кругом находится источник света. Синус угла падения лучей света на края круга $\sin\alpha = 3/4$. Каков радиус тени круга, если $n_{\text{воды}}/n_{\text{воздуха}} = 4/3$?

Решение. 1. Свет проникает в воду через круг радиуса $R = 3$ м. Лучи, падающие на края круга, преломляются. Предельный угол преломления $\beta_{\text{пр}}$ определяется из $\sin\alpha = 3/4$ и $n = 4/3$:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{4}{3} \implies \sin\beta = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}.$$

2. Тогда $\cos\beta = \sqrt{1-(9/16)^2} = \sqrt{1-81/256} = \sqrt{175/256} = \frac{5\sqrt{7}}{16}$. 3. $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{9/16}{5\sqrt{7}/16} = \frac{9}{5\sqrt{7}}$. 4. Расширение тени на глубине $H = 1,3$ м:

$$\Delta R = H\operatorname{tg}\beta = 1,3\cdot\frac{9}{5\sqrt{7}} = \frac{11,7}{5\sqrt{7}} \approx \frac{11,7}{13,23} \approx 0,884 \text{ м}.$$

5. Радиус тени:

$$R_{\text{тени}} = R + \Delta R = 3 + 0,884 = 3,884 \text{ м}.$$

Ответ: $3,884$ м.

Задача 29. **Условие.** Свая вбита в водоём перпендикулярно дну, высота части сваи, находящейся над водой, 0.8 м. Наблюдатель смотрит на конец сваи из-под воды. Какова видимая высота части сваи над водой для наблюдателя, если $n_{\text{воды}}/n_{\text{воздуха}} = 1.4$? Углы принять малыми.

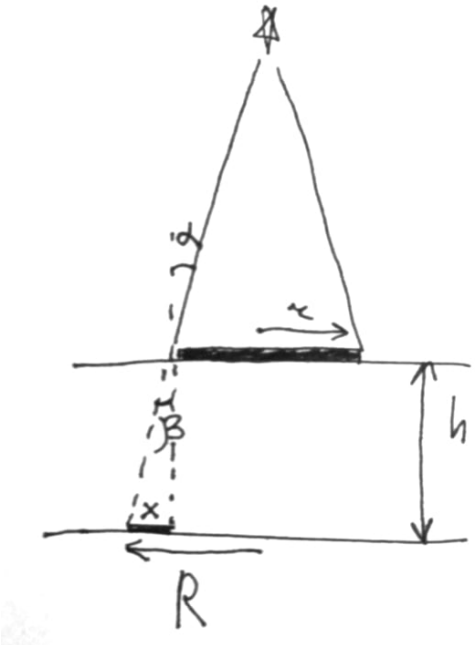
Решение. 1. Видимая высота части сваи над водой определяется кажущимся поднятием точки выхода сваи из воды. Для малых углов кажущаяся высота h' связана с истинной высотой h соотношением $h' = h/n$, где $n = 1,4$. 2. Подставляем $h = 0,8$ м:

$$h' = \frac{0,8}{1,4} \approx 0,571 \text{ м}.$$

Однако наблюдатель находится под водой и смотрит на конец сваи, находящийся над водой. В этом случае видимая высота будет больше истинной: $h' = h\cdot n = 0,8\cdot 1,4 = 1,12$ м.

Ответ: $1,12$ м.

Задача 30. **Условие.** На поверхности водоёма глубиной 2 м плавает круг радиусом 1.7 м. Прямо над кругом находится источник света. Угол падения лучей света на края круга $\alpha = 30°$. Каков радиус тени круга, если $n_{\text{жидкости}} = 5/3$?



Решение. Запишем закон преломления Снеллиуса в точке на краю диска:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_{\text{жидкости}}}{n_{\text{воздуха}}} = \frac{5}{3}.$$

Так как $\alpha = 30^\circ$, то $\sin\alpha = 1/2$, откуда

$$\sin\beta = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{10}.$$

Найдём $\cos\beta$:

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{10}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{100}} = \sqrt{\frac{91}{100}}.$$

Тогда

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{3/10}{\sqrt{91}/10} = \frac{3}{\sqrt{91}}.$$

Добавочное расширение тени на глубине $h = 2$ м:

$$x = h\operatorname{tg}\beta = 2\cdot\frac{3}{\sqrt{91}} = \frac{6}{\sqrt{91}} \approx 0.6 \text{ м}.$$

Радиус тени:

$$R = r + x = 1.7 + 0.6 = 2.3 \text{ м}.$$

Ответ: 2.3 м.