# Гидростатика. Законы Паскаля и Архимеда

Преподаватель: Сорокина Василиса Ивановна

## Задачи

**Задача 1.** Масса Сатурна $M = 6 \cdot 10^{26}$ кг, а объём $V = 8 \cdot 10^{23}$ м$^3$. Найти среднюю плотность планеты и сравнить её с плотностью воды.

**Задача 2.** Почему к человеку, провалившемуся под лёд, нужно подползать, раскинув руки и ноги, или подкладывать доску, а не идти пешком? Обоснуйте с точки зрения формулы давления.

**Задача 3.** Марсоход «Персеверанс» подобрал камень массой 4,5 кг. Объём камня оказался равен 1500 см$^3$. Чему равна плотность камня?

**Задача 4.** Площадь малого поршня гидравлического пресса на СТО равна 5 см$^2$, а большого — 500 см$^2$. Какую силу должен приложить автомеханик к малому поршню, чтобы поднять джип массой 2 тонны? ($g = 10$ м/с$^2$).

**Задача 5.** Опытный дайвер погружается в Красном море на глубину 40 м. Каково гидростатическое давление воды на этой глубине? (Плотность солёной воды 1030 кг/м$^3$, $g = 9{,}8$ м/с$^2$).

**Задача 6.** Почему носик чайника всегда делают такой высоты, чтобы его кончик был на одном уровне с верхним краем самого чайника? Что будет, если носик сделать в два раза ниже?

**Задача 7.** Мальчик полностью погрузил в воду кирпич объёмом 2 литра (0,002 м$^3$). Какая выталкивающая сила действует на кирпич? (Плотность пресной воды 1000 кг/м$^3$, кирпича 1800 кг/м$^3$, $g = 10$ м/с$^2$).

**Задача 8.** Почему в Мёртвом море человек может лежать на воде и читать газету, не прилагая усилий для плавания?

**Задача 9.** Известно, что плотность льда равна 900 кг/м$^3$, а плотность морской воды 1030 кг/м$^3$. Какая часть объёма огромного айсберга скрыта под водой? Ответ выразите в процентах.

**Задача 10.** Игрушечный пистолет стреляет присоской. Площадь присоски 10 см$^2$. С какой силой нужно тянуть присоску, чтобы оторвать её от гладкого стекла? Считать, что под присоской идеальный вакуум, а атмосферное давление $10^5$ Па.

**Задача 11.** Почему воздушный шар, наполненный гелием, летит вверх, а шар, надутый ртом, падает вниз?

**Задача 12.** В гидравлическом прессе малый поршень опустился на $h_1 = 20$ см под действием силы 100 Н. На какое расстояние $h_2$ поднялся большой поршень, если он поднял груз весом 4000 Н? КПД пресса считать равным 100%.

**Задача 13.** Зонд «Гюйгенс» сел на спутник Сатурна Титан. Там есть озёра из жидкого метана (плотность $\approx 400$ кг/м$^3$). Ускорение свободного падения на Титане $g_T \approx 1{,}35$ м/с$^2$. Кубик массой 1 кг и объёмом $2 \cdot 10^{-3}$ м$^3$ бросили в это озеро. Будет ли он плавать или утонет? Чему равна сила Архимеда?

**Задача 14.** В U-образную трубку налита ртуть ($\rho_{\text{рт}} = 13600$ кг/м$^3$). В правое колено долили столб машинного масла ($\rho_{\text{м}} = 800$ кг/м$^3$) высотой 17 см. На сколько миллиметров уровень ртути в левом колене станет выше, чем уровень ртути в правом?

**Задача 15.** Лёгкий надувной шарик объёмом $V = 5$ литров и массой оболочки 10 г полностью погружён в воду с помощью нити, конец которой привязан ко дну. Найдите силу натяжения нити. ($g = 10$ м/с$^2$, объёмом и массой воздуха пренебречь).

**Задача 16.** Деревянный кубик с ребром 10 см плавает в сосуде на границе раздела двух жидкостей: воды ($\rho_1 = 1000$ кг/м$^3$) снизу и слоя масла ($\rho_2 = 800$ кг/м$^3$) сверху. Масло полностью покрывает кубик. Плотность дерева $\rho_{\text{д}} = 850$ кг/м$^3$. Какая часть высоты кубика находится в воде?

**Задача 17.** Кусок сплава золота и серебра в воздухе весит $P_1 = 14{,}7$ Н, а при полном погружении в воду его «вес» (сила натяжения подвеса) составляет $P_2 = 13{,}4$ Н. Найдите плотность этого сплава. ($g = 10$ м/с$^2$, $\rho_{\text{в}} = 1000$ кг/м$^3$).

**Задача 18.** В прозрачном стакане с водой плавает кусок льда. Стакан наполнен водой до краёв. Вопрос: перельётся ли вода через край, когда лёд полностью растает?

**Задача 19.** В стакане с водой плавает кусок льда, в который вморожена стальная монета. Что произойдёт с уровнем воды в стакане, когда лёд растает? (Понизится, повысится или не изменится?)

**Задача 20.** Бетонная плотина шириной $L = 50$ м удерживает воду глубиной $H = 20$ м. Найдите результирующую силу давления воды на плотину (вода давит неравномерно, используйте среднее гидростатическое давление).

**Задача 21.** Со дна глубокого водоёма глубиной $H = 10$ м отпускают деревянный шарик плотностью $\rho = 500$ кг/м$^3$. На какую высоту $h$ над поверхностью воды он выпрыгнет? (Считайте воду идеальной жидкостью, трением о воду пренебречь, изменение уровня воды в водоёме не учитывать).

**Задача 22.** Представьте себе планету, состоящую целиком из несжимаемой жидкости плотностью $\rho$. Радиус планеты $R_{\text{pl}}$. Как зависит гидростатическое давление внутри планеты от расстояния до её центра $r$? Учтите, что ускорение свободного падения $g(r)$ внутри планеты не постоянно, а зависит от $r$.

**Задача 23.** Воздушный шар радиусом $R = 2{,}1$ см находится на дне озера на глубине $h = 50$ м. Шар начинает всплывать, процесс всплытия изотермический (температура воды и газа внутри шара постоянна $T = \text{const}$, значит $pV = \text{const}$). Известно, что оболочка шара может растянуться максимум до радиуса $R_0 = 3$ см, после чего она перестаёт расширяться, и дальнейшее превышение внутреннего давления над внешним на $\Delta p = 2000$ Па приводит к разрыву. На какой глубине шар лопнет? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

# Решения

**Задача 1.** **Условие.** Масса Сатурна $M = 6 \cdot 10^{26}$ кг, а объём $V = 8 \cdot 10^{23}$ м$^3$. Найти среднюю плотность планеты и сравнить её с плотностью воды.

**Решение.** Плотность вещества определяется отношением массы тела к занимаемому им объёму:

$$\rho = \frac{M}{V}.$$

Подставим данные из условия:

$$\rho = \frac{6 \cdot 10^{26}\ \text{кг}}{8 \cdot 10^{23}\ \text{м}^3} = \frac{6}{8} \cdot 10^3\ \text{кг/м}^3 = 0{,}75 \cdot 10^3\ \text{кг/м}^3 = 750\ \text{кг/м}^3.$$

Плотность чистой пресной воды равна $\rho_\text{в} = 1000$ кг/м$^3$. Поскольку $\rho = 750$ кг/м$^3$ $< 1000$ кг/м$^3$, средняя плотность Сатурна меньше плотности воды. Это означает, что если бы существовал гигантский океан с водой, Сатурн плавал бы на его поверхности.

**Ответ:** $\rho = 750$ кг/м$^3$; плотность Сатурна меньше плотности воды.

**Задача 2.** **Условие.** Почему к человеку, провалившемуся под лёд, нужно подползать, раскинув руки и ноги, или подкладывать доску, а не идти пешком? Обоснуйте с точки зрения формулы давления.

**Решение.** Давление твёрдого тела на опору определяется формулой:

$$p = \frac{F}{S},$$

где $F = mg$ — сила тяжести (вес человека), а $S$ — площадь опоры, через которую распределяется данная сила.

- Когда человек идёт пешком, площадь опоры мала (только площадь подошв обуви: $S \approx 0{,}03$–$0{,}05$ м$^2$). Это создаёт высокое локальное давление на лёд, которое превышает предел его прочности на излом, вызывая разрушение.
- Когда человек ползёт, широко раскинув руки и ноги, или ложится на доску/лестницу, площадь опоры $S$ увеличивается во много раз. Поскольку сила тяжести $F$ неизменна, давление $p$ обратно пропорционально площади опоры и значительно снижается, что предотвращает дальнейший разлом ледяного покрова.

**Задача 3.** **Условие.** Марсоход «Персеверанс» подобрал камень массой 4,5 кг. Объём камня оказался равен 1500 см$^3$. Чему равна плотность камня?

**Решение.** Переведём объём в единицы СИ:

$$V = 1500\ \text{см}^3 = 1500 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^3 = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3.$$

Плотность вещества вычисляется по формуле:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4{,}5\ \text{кг}}{1{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3} = 3000\ \text{кг/м}^3.$$

**Ответ:** 3000 кг/м$^3$ (или 3 г/см$^3$).

**Задача 4.** **Условие.** Площадь малого поршня гидравлического пресса на СТО равна 5 см$^2$, а большого — 500 см$^2$. Какую силу должен приложить автомеханик к малому поршню, чтобы поднять джип массой 2 тонны? ($g = 10$ м/с$^2$).

**Решение.** Сила тяжести, действующая на большой поршень со стороны автомобиля:

$$F_2 = mg = 2000 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 = 20000 \text{ Н}.$$

По закону Паскаля давление жидкости под обоими поршнями на одном уровне одинаково:

$$p_1 = p_2 \implies \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}.$$

Отсюда выразим необходимую силу $F_1$, прикладываемую к малому поршню:

$$F_1 = F_2 \cdot \frac{S_1}{S_2} = 20000 \text{ Н} \cdot \frac{5 \text{ см}^2}{500 \text{ см}^2} = 20000 \cdot \frac{1}{100} = 200 \text{ Н}.$$

**Ответ:** 200 Н.

**Задача 5.** **Условие.** Опытный дайвер погружается в Красном море на глубину 40 м. Каково гидростатическое давление воды на этой глубине? (Плотность солёной воды 1030 кг/м$^3$, $g = 9{,}8$ м/с$^2$).

**Решение.** Гидростатическое давление, создаваемое столбом жидкости высотой $h$, определяется формулой:

$$p = \rho g h.$$

Подставим численные значения:

$$p = 1030 \text{ кг/м}^3 \cdot 9{,}8 \text{ м/с}^2 \cdot 40 \text{ м} = 1030 \cdot 392 \text{ Па} = 403\,760 \text{ Па}.$$

**Ответ:** 403 760 Па $\approx$ 403,8 кПа.

**Задача 6.** **Условие.** Почему носик чайника всегда делают такой высоты, чтобы его кончик был на одном уровне с верхним краем самого чайника? Что будет, если носик сделать в два раза ниже?

**Решение.** Корпус чайника и его носик представляют собой сообщающиеся сосуды. Согласно гидростатическому закону для сообщающихся сосудов, однородная жидкость в состоянии покоя устанавливается на одинаковом горизонтальном уровне в обоих коленах. Если отверстие носика расположено на уровне верхнего края корпуса, то чайник можно залить водой целиком. Если же носик сделать в два раза ниже, то при попытке налить воду выше этого уровня она начнёт самопроизвольно переливаться через край носика. В результате полезный объём чайника сократится вдвое.

**Задача 7.** **Условие.** Мальчик полностью погрузил в воду кирпич объёмом 2 литра (0,002 м$^3$). Какая выталкивающая сила действует на кирпич? (Плотность пресной воды 1000 кг/м$^3$, кирпича 1800 кг/м$^3$, $g = 10$ м/с$^2$).

**Решение.** По закону Архимеда выталкивающая сила зависит исключительно от плотности жидкости $\rho_{\text{ж}}$, в которую погружено тело, и объёма погруженной части $V_{\text{погр}}$:

$$F_A = \rho_{\text{ж}} g V_{\text{погр}}.$$

Плотность самого кирпича определяет лишь его вес, но не величину силы Архимеда. Поскольку кирпич погружен полностью, $V_{\text{погр}} = 0{,}002$ м$^3$:

$$F_A = 1000 \text{ кг/м}^3 \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 0{,}002 \text{ м}^3 = 20 \text{ Н}.$$

(При использовании значения $g = 9{,}8$ м/с$^2$: $F_A = 1000 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}002 = 19{,}6$ Н).

**Ответ:** 20 Н (или 19,6 Н).

**Задача 8.** **Условие.** Почему в Мёртвом море человек может лежать на воде и читать газету, не прилагая усилий для плавания?

**Решение.** Условие свободного плавания тела на поверхности формулируется через равенство силы Архимеда и силы тяжести: $\rho_{\text{ж}} g V_{\text{погр}} = \rho_{\text{тела}} g V_{\text{тела}}$, откуда:

$$\frac{V_{\text{погр}}}{V_{\text{тела}}} = \frac{\rho_{\text{тела}}}{\rho_{\text{ж}}}.$$

Средняя плотность тела человека близка к плотности пресной воды: $\rho_{\text{чел}} \approx 950$–$1020$ кг/м$^3$. Вода Мёртвого моря содержит около 30–35% солей, и её плотность составляет $\rho_{\text{ж}} \approx 1200$–$1240$ кг/м$^3$. Поскольку $\rho_{\text{чел}} < \rho_{\text{ж}}$, для компенсации веса человека требуется погрузить лишь часть объёма тела ($\approx 80\%$). Оставшаяся часть остаётся над поверхностью воды, создавая устойчивое положение плавания без необходимости грести.

**Задача 9.** **Условие.** Известно, что плотность льда равна 900 кг/м$^3$, а плотность морской воды 1030 кг/м$^3$. Какая часть объёма огромного айсберга скрыта под водой? Ответ выразите в процентах.

**Решение.** Айсберг находится в состоянии гидростатического равновесия:

$$F_{\text{тяж}} = F_A \implies mg = \rho_{\text{в}} g V_{\text{подв}} \implies \rho_{\text{л}} V_{\text{полн}} g = \rho_{\text{в}} g V_{\text{подв}}.$$

Разделив обе части уравнения на $gV_{\text{полн}}$, находим искомую долю подводной части айсберга:

$$\frac{V_{\text{подв}}}{V_{\text{полн}}} = \frac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}} = \frac{900 \text{ кг/м}^3}{1030 \text{ кг/м}^3} = \frac{90}{103} \approx 0{,}8738 \implies 87{,}38\%.$$

**Ответ:** $\approx 87{,}4\%$.

**Задача 10.** **Условие.** Игрушечный пистолет стреляет присоской. Площадь присоски 10 см$^2$. С какой силой нужно тянуть присоску, чтобы оторвать её от гладкого стекла? Считать, что под присоской идеальный вакуум, а атмосферное давление $10^5$ Па.

**Решение.** Переведём площадь в систему СИ:

$$S = 10 \text{ см}^2 = 10 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Под присоской вакуум, следовательно, внутреннее давление $p_{\text{внутр}} = 0$. Снаружи атмосфера действует на присоску с силой:

$$F_{\text{атм}} = p_0 \cdot S.$$

Чтобы оторвать присоску, прикладываемая сила тяги $F$ должна как минимум уравновесить силу давления атмосферы:

$$F = p_0 S = 10^5 \text{ Па} \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 100 \text{ Н}.$$

**Ответ:** 100 Н.

**Задача 11.** **Условие.** Почему воздушный шар, наполненный гелием, летит вверх, а шар, надутый ртом, падает вниз?

**Решение.** На любой шар в воздухе действуют:

1. Выталкивающая архимедова сила, направленная вверх: $F_A = \rho_{\text{возд}} V g$.
2. Сила тяжести, направленная вниз: $F_{\text{тяж}} = (m_{\text{об}} + m_{\text{газ}}) g = m_{\text{об}} g + \rho_{\text{газ}} V g$.

- Шар с гелием: плотность гелия ($\rho_{\text{He}} \approx 0{,}18$ кг/м$^3$) значительно меньше плотности воздуха ($\rho_{\text{возд}} \approx 1{,}29$ кг/м$^3$). Суммарная масса гелия и лёгкой оболочки меньше массы вытесненного воздуха того же объёма ($F_A > F_{\text{тяж}}$), поэтому результирующая сила тянет шар вверх.

- Шар, надутый ртом: наполнен выдыхаемым воздухом (с примесью паров воды и углекислого газа), плотность которого примерно равна плотности окружающего воздуха: $\rho_{\text{газ}} \approx \rho_{\text{возд}}$. С учётом массы резиновой оболочки $m_{\text{об}} > 0$ суммарная сила тяжести строго больше силы Архимеда ($F_{\text{тяж}} > F_A$), поэтому шар опускается.

**Задача 12.** **Условие.** В гидравлическом прессе малый поршень опустился на $h_1 = 20$ см под действием силы 100 Н. На какое расстояние $h_2$ поднялся большой поршень, если он поднял груз весом 4000 Н? КПД пресса считать равным 100%.

**Решение.** При 100%-м КПД механическая работа, совершённая над малым поршнем, в точности равна работе, совершённой большим поршнем по подъёму груза (золотое правило механики):

$$A_1 = A_2 \implies F_1 h_1 = F_2 h_2.$$

Выразим величину перемещения большого поршня $h_2$:

$$h_2 = \frac{F_1 h_1}{F_2}.$$

Подставим числовые значения ($h_1 = 20$ см $= 0{,}2$ м):

$$h_2 = \frac{100 \text{ Н} \cdot 0{,}2 \text{ м}}{4000 \text{ Н}} = \frac{20}{4000} \text{ м} = 0{,}005 \text{ м} = 0{,}5 \text{ см} = 5 \text{ мм}.$$

**Ответ:** 0,5 см (или 5 мм).

**Задача 13.** **Условие.** Зонд «Гюйгенс» сел на спутник Сатурна Титан. Там есть озёра из жидкого метана (плотность $\approx 400$ кг/м$^3$). Ускорение свободного падения на Титане $g_T \approx 1{,}35$ м/с$^2$. Кубик массой 1 кг и объёмом $2 \cdot 10^{-3}$ м$^3$ бросили в это озеро. Будет ли он плавать или утонет? Чему равна сила Архимеда?

**Решение.**

1. Рассчитаем среднюю плотность кубика:

$$\rho_k = \frac{m}{V} = \frac{1 \text{ кг}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3} = 500 \text{ кг/м}^3.$$

2. Сравним плотность кубика с плотностью жидкого метана:

$$\rho_k = 500 \text{ кг/м}^3 > \rho_{\text{мет}} = 400 \text{ кг/м}^3.$$

   Так как плотность тела превосходит плотность жидкости, кубик утонет и опустится на дно.

3. Поскольку тело полностью погружено, объём вытесненной жидкости равен полному объёму кубика $V_{\text{погр}} = V$. Сила Архимеда на Титане:

$$F_A = \rho_{\text{мет}} g_T V = 400 \text{ кг/м}^3 \cdot 1{,}35 \text{ м/с}^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 400 \cdot 1{,}35 \cdot 0{,}002 = 1{,}08 \text{ Н}.$$

   (Для сравнения, сила тяжести $F_{\text{тяж}} = mg_T = 1{,}35$ Н $> F_A$, что подтверждает потопление).

**Ответ:** Кубик утонет; $F_A = 1{,}08$ Н.

**Задача 14.** **Условие.** В U-образную трубку налита ртуть ($\rho_{\text{рт}} = 13600$ кг/м$^3$). В правое колено долили столб машинного масла ($\rho_{\text{м}} = 800$ кг/м$^3$) высотой 17 см. На сколько миллиметров уровень ртути в левом колене станет выше, чем уровень ртути в правом?

**Решение.** Выберем уровень раздела «масло – ртуть» в правом колене за горизонтальную плоскость сравнения.

- Давление в правом колене на этом уровне: $p_{\text{пр}} = p_0 + \rho_{\text{м}} g h_{\text{м}}$.
- Давление в левом колене на той же горизонтали создаётся столбом ртути высотой $\Delta h$: $p_{\text{лев}} = p_0 + \rho_{\text{рт}} g \Delta h$.

В силу гидростатического равновесия давления на одном горизонтальном уровне в однородной жидкости (ртути) равны:

$$p_{\text{лев}} = p_{\text{пр}} \implies \rho_{\text{рт}} g \Delta h = \rho_{\text{м}} g h_{\text{м}}.$$

Отсюда находим разность уровней ртути:

$$\Delta h = h_{\text{м}} \cdot \frac{\rho_{\text{м}}}{\rho_{\text{рт}}} = 17 \text{ см} \cdot \frac{800}{13600} = 17 \cdot \frac{1}{17} \text{ см} = 1 \text{ см} = 10 \text{ мм}.$$

**Ответ:** на 10 мм.

**Задача 15.** **Условие.** Лёгкий надувной шарик объёмом $V = 5$ литров и массой оболочки 10 г полностью погружён в воду с помощью нити, конец которой привязан ко дну. Найдите силу натяжения нити. ($g = 10$ м/с$^2$, объёмом и массой воздуха пренебречь).

**Решение.** Переведём величины в систему СИ:

$$V = 5 \text{ л} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3, \quad m = 10 \text{ г} = 0{,}01 \text{ кг}, \quad \rho_{\text{в}} = 1000 \text{ кг/м}^3.$$

На шарик действуют три силы вдоль вертикали:

1. Сила Архимеда вверх: $F_A = \rho_{\text{в}} g V = 1000 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 50$ Н.
2. Сила тяжести оболочки вниз: $F_{\text{тяж}} = mg = 0{,}01 \cdot 10 = 0{,}1$ Н.
3. Сила натяжения нити $T$, направленная вниз.

Условие равновесия шарика:

$$F_A = F_{\text{тяж}} + T \implies T = F_A - F_{\text{тяж}} = 50 \text{ Н} - 0{,}1 \text{ Н} = 49{,}9 \text{ Н}.$$

**Ответ:** 49,9 Н.

**Задача 16.** **Условие.** Деревянный кубик с ребром 10 см плавает в сосуде на границе раздела двух жидкостей: воды ($\rho_1 = 1000$ кг/м$^3$) снизу и слоя масла ($\rho_2 = 800$ кг/м$^3$) сверху. Масло полностью покрывает кубик. Плотность дерева $\rho_{\text{д}} = 850$ кг/м$^3$. Какая часть высоты кубика находится в воде?

**Решение.** Пусть $a = 10$ см — ребро кубика, $S = a^2$ — площадь его грани, а $h$ — высота погружения кубика в нижний слой (воду). Тогда в верхнем слое (масле) находится часть кубика высотой $(a - h)$. Объём кубика в воде: $V_1 = Sh$; объём в масле: $V_2 = S(a - h)$. Условие плавания кубика (равенство силы тяжести сумме архимедовых сил):

$$Mg = F_{A1} + F_{A2} \implies \rho_{\text{д}} S a g = \rho_1 g S h + \rho_2 g S (a - h).$$

Разделим обе части на $gS$:

$$\rho_д a = \rho_1 h + \rho_2(a-h) \implies \rho_д a = \rho_1 h + \rho_2 a - \rho_2 h.$$

Сгруппируем:

$$(\rho_1 - \rho_2)h = (\rho_д - \rho_2)a.$$

Отсюда находим отношение высоты погружения в воду к полной высоте кубика:

$$\frac{h}{a} = \frac{\rho_д - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} = \frac{850-800}{1000-800} = \frac{50}{200} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Высота погруженной в воду части составляет $h = 0{,}25 \cdot 10$ см $= 2{,}5$ см.

**Ответ:** $\frac{1}{4}$ (или 25%, 2,5 см).

**Задача 17.** **Условие.** Кусок сплава золота и серебра в воздухе весит $P_1 = 14{,}7$ Н, а при полном погружении в воду его «вес» (сила натяжения подвеса) составляет $P_2 = 13{,}4$ Н. Найдите плотность этого сплава. ($g = 10$ м/с$^2$, $\rho_в = 1000$ кг/м$^3$).

**Решение.**

1. Вес куска в воздухе равен силе тяжести (пренебрегая выталкивающей силой воздуха):

$$P_1 = mg \implies m = \frac{P_1}{g}.$$

2. При погружении в воду натяжение нити уменьшается за счёт силы Архимеда:

$$P_2 = P_1 - F_A \implies F_A = P_1 - P_2 = 14{,}7 \text{ Н} - 13{,}4 \text{ Н} = 1{,}3 \text{ Н}.$$

3. Сила Архимеда равна весу вытесненной воды:

$$F_A = \rho_в g V \implies V = \frac{F_A}{\rho_в g}.$$

4. Выразим плотность сплава $\rho$:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{P_1/g}{F_A/(\rho_в g)} = \frac{P_1}{P_1 - P_2}\rho_в.$$

Подставим численные значения:

$$\rho = \frac{14{,}7}{1{,}3} \cdot 1000 \text{ кг/м}^3 \approx 11\,308 \text{ кг/м}^3.$$

**Ответ:** $\approx 11\,308$ кг/м$^3$ (или $\approx 11{,}3$ г/см$^3$).

**Задача 18.** **Условие.** В прозрачном стакане с водой плавает кусок льда. Стакан наполнен водой до краёв. Вопрос: перельётся ли вода через край, когда лёд полностью растает?

**Решение.**

1. Пусть масса куска льда равна $m_л$. Пока лёд плавает, сила тяжести льда уравновешена силой Архимеда:

$$m_л g = \rho_в g V_{подв} \implies V_{подв} = \frac{m_л}{\rho_в}.$$

Следовательно, плавающий лёд вытесняет объём воды, равный $m_л/\rho_в$.

2. Когда кусок растает, по закону сохранения массы масса получившейся воды будет равна массе исходного льда: $m_{\text{воды}} = m_{\text{л}}$.

3. Объём, который займёт растаявшая вода:

$$V_{\text{обр}} = \frac{m_{\text{воды}}}{\rho_{\text{в}}} = \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}}.$$

4. Сравнивая объёмы, получаем: $V_{\text{обр}} = V_{\text{подв}}$.

Объём растаявшей воды в точности равен объёму подводной полости, которую занимал лёд при плавании. Уровень воды в стакане не изменится ни на миллиметр.

**Ответ:** Вода не перельётся (уровень воды не изменится).

**Задача 19. Условие.** В стакане с водой плавает кусок льда, в который вморожена стальная монета. Что произойдёт с уровнем воды в стакане, когда лёд растает? (Понизится, повысится или не изменится?)

**Решение.** Обозначим: $m_{\text{л}}$ — масса льда, $m_{\text{м}}$ — масса монеты, $\rho_{\text{ст}}$ — плотность стали ($\rho_{\text{ст}} \approx 7800$ кг/м$^3$).

1. До таяния: Система «лёд + монета» плавает как единое целое. Сила Архимеда равна общему весу:

$$(m_{\text{л}} + m_{\text{м}})g = \rho_{\text{в}} g V_1 \implies V_1 = \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}} + \frac{m_{\text{м}}}{\rho_{\text{в}}}.$$

   Здесь $V_1$ — объём воды, вытесняемый плавающей системой.

2. После таяния: Лёд превращается в воду объёмом $V_{\text{в}} = m_{\text{л}}/\rho_{\text{в}}$. Стальная монета тонет и падает на дно, так как $\rho_{\text{ст}} > \rho_{\text{в}}$. Утонувшая монета вытесняет объём воды, равный её собственному геометрическому объёму:

$$V_{\text{м}} = \frac{m_{\text{м}}}{\rho_{\text{ст}}}.$$

   Суммарный объём, вытесняемый системой после таяния:

$$V_2 = \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}} + \frac{m_{\text{м}}}{\rho_{\text{ст}}}.$$

3. Сравним вытесняемые объёмы:

$$V_1 - V_2 = m_{\text{м}} \left( \frac{1}{\rho_{\text{в}}} - \frac{1}{\rho_{\text{ст}}} \right).$$

   Так как плотность стали больше плотности воды ($\rho_{\text{ст}} > \rho_{\text{в}}$), разность $V_1 - V_2 > 0$, то есть суммарный вытесненный объём уменьшается.

**Ответ:** Уровень воды понизится.

**Задача 20. Условие.** Бетонная плотина шириной $L = 50$ м удерживает воду глубиной $H = 20$ м. Найдите результирующую силу давления воды на плотину (вода давит неравномерно, используйте среднее гидростатическое давление).

**Решение.** Гидростатическое давление зависит от глубины линейно:

$$p(z) = \rho g z,$$

где $z$ меняется от 0 (на поверхности) до $H$ (у дна). Среднее давление по всей вертикальной стенке равно значению давления на полуглубине $H/2$:

$$p_{\text{ср}} = \frac{p(0) + p(H)}{2} = \frac{0 + \rho g H}{2} = \frac{\rho g H}{2}.$$

Площадь контакта воды с плотиной:

$$S = L \cdot H.$$

Результирующая сила горизонтального давления воды на плотину:

$$F = p_{\text{ср}} \cdot S = \frac{\rho g H}{2} \cdot (LH) = \frac{1}{2} \rho g L H^2.$$

Подставим числовые значения ($\rho = 1000$ кг/м$^3$, $g = 10$ м/с$^2$, $L = 50$ м, $H = 20$ м):

$$F = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 10 \cdot 50 \cdot (20)^2 = 5000 \cdot 50 \cdot 400 = 10^8 \text{ Н} = 100 \text{ МН}.$$

(При расчёте с $g = 9{,}8$ м/с$^2$: $F = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 9{,}8 \cdot 50 \cdot 400 = 98$ МН).

**Ответ:** $10^8$ Н $= 100$ МН (или 98 МН).

**Задача 21. Условие.** Со дна глубокого водоёма глубиной $H = 10$ м отпускают деревянный шарик плотностью $\rho = 500$ кг/м$^3$. На какую высоту $h$ над поверхностью воды он выпрыгнет? (Считайте воду идеальной жидкостью, трением о воду пренебречь, изменение уровня воды в водоёме не учитывать).

**Решение. Способ 1 (через законы динамики и кинематики):**

1. При всплытии на шарик действуют две силы: направленная вверх выталкивающая сила Архимеда $F_A = \rho_{\text{в}} V g$ и направленная вниз сила тяжести $F_{\text{тяж}} = \rho V g$.

2. По второму закону Ньютона:

$$ma = F_A - mg \implies \rho V a = \rho_{\text{в}} V g - \rho V g \implies a = g\left(\frac{\rho_{\text{в}}}{\rho} - 1\right).$$

   Подставим плотности ($\rho_{\text{в}} = 1000$ кг/м$^3$, $\rho = 500$ кг/м$^3$):

$$a = g\left(\frac{1000}{500} - 1\right) = g(2 - 1) = g.$$

   Шарик всплывает в толще воды с ускорением $a = g = 10$ м/с$^2$.

3. Пройдя со дна расстояние $H$, у поверхности воды шарик приобретает скорость $v$:

$$v^2 = 2aH = 2gH.$$

4. После вылета из воды шарик движется вертикально вверх в воздухе под действием силы тяжести с ускорением свободного падения $g$, направленным вниз. Максимальная высота подъёма:

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{2gH}{2g} = H.$$

**Способ 2 (через закон сохранения механической энергии):** Работа силы Архимеда на пути $H$ переходит в приращение потенциальной энергии тела в поле тяжести на суммарной высоте $(H + h)$:

$$A_A = \Delta E_p \implies F_A \cdot H = mg(H + h) \implies \rho_{\text{в}} V g H = \rho V g (H + h).$$

Сокращая на $Vg$:

$$\rho_{\text{в}} H = \rho(H + h) \implies h = H\left(\frac{\rho_{\text{в}}}{\rho} - 1\right) = 10 \text{ м} \cdot (2 - 1) = 10 \text{ м}.$$

**Ответ:** $h = 10$ м.

**Задача 22. Условие.** Представьте себе планету, состоящую целиком из несжимаемой жидкости плотностью $\rho$. Радиус планеты $R_{\text{pl}}$. Как зависит гидростатическое давление внутри планеты от расстояния до её центра $r$? Учтите, что ускорение свободного падения $g(r)$ внутри планеты не постоянно, а зависит от $r$.

**Решение.**

1. По закону всемирного тяготения (теореме Ньютона/Гаусса для гравитации), гравитационное притяжение к центру на расстоянии $r$ от центра сферы ($r \le R_{\text{pl}}$) создаётся только массой, заключённой внутри сферы радиуса $r$:

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho.$$

   Внешние сферические слои суммарного гравитационного поля внутри себя не создают.

2. Ускорение свободного падения на расстоянии $r$ равно:

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2} = \frac{G \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G \rho r.$$

3. Рассмотрим сферический слой жидкости радиуса $r$ и толщиной $dr$. Условие механического равновесия слоя в радиальном направлении:

$$dp = -\rho g(r)\, dr.$$

   Знак минус указывает на то, что давление уменьшается по мере удаления от центра к поверхности.

4. Проинтегрируем данное уравнение от произвольного расстояния $r$ до поверхности планеты $R_{\text{pl}}$, учитывая граничное условие $p(R_{\text{pl}}) = 0$:

$$\int_{p(r)}^{0} dp = -\int_{r}^{R_{\text{pl}}} \rho\left(\frac{4}{3}\pi G \rho r'\right) dr'.$$

$$-p(r) = -\frac{4}{3}\pi G \rho^2 \int_{r}^{R_{\text{pl}}} r'\, dr' = -\frac{4}{3}\pi G \rho^2 \left[\frac{(R_{\text{pl}})^2 - r^2}{2}\right].$$

**Ответ:** $p(r) = \frac{2}{3}\pi G \rho^2 (R_{\text{pl}}^2 - r^2)$.

**Задача 23. Условие.** Воздушный шар радиусом $R = 2{,}1$ см находится на дне озера на глубине $h = 50$ м. Шар начинает всплывать, процесс всплытия изотермический (температура воды и газа внутри шара постоянна $T = \text{const}$, значит $pV = \text{const}$). Известно, что оболочка шара может растянуться максимум до радиуса $R_0 = 3$ см, после чего она перестаёт расширяться, и дальнейшее превышение внутреннего давления над внешним на $\Delta p = 2000$ Па приводит к разрыву. На какой глубине шар лопнет? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

**Решение.**

1. На дне озера (на глубине $h = 50$ м) внешнее давление воды равно:

$$p_1 = p_0 + \rho_в g h = 10^5 \text{ Па} + 1000 \text{ кг/м}^3 \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 50 \text{ м} = 10^5 + 5 \cdot 10^5 = 6 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

   Пока оболочка свободно растягивается ($R < R_0$), давление газа внутри шара равно внешнему давлению воды. Объём газа на дне равен $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$.

2. При всплытии давление воды падает, и шар расширяется. Когда радиус шара достигает предельного значения $R_0 = 3$ см, его объём становится равным $V_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3$ и больше не увеличивается.

3. Так как процесс изотермический ($T = \text{const}$), по закону Бойля–Мариотта:

$$p_1 V_1 = p_{\text{внутр}} V_0 \implies p_{\text{внутр}} = p_1 \cdot \frac{V_1}{V_0} = p_1 \left(\frac{R}{R_0}\right)^3.$$

   Вычислим отношение:

$$\frac{R}{R_0} = \frac{2{,}1 \text{ см}}{3{,}0 \text{ см}} = 0{,}7 \implies \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 = (0{,}7)^3 = 0{,}343.$$

   Внутреннее давление газа при максимальном объёме:

$$p_{\text{внутр}} = 6 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot 0{,}343 = 205\,800 \text{ Па}.$$

4. Дальнейший подъём происходит при фиксированном объёме $V_0$, поэтому внутреннее давление газа остаётся постоянным ($p_{\text{внутр}} = 205\,800$ Па), а внешнее давление воды $p_{\text{внеш}}(h_x)$ продолжает снижаться. Шар лопнет в момент, когда перепад давлений достигнет критического значения:

$$p_{\text{внутр}} - p_{\text{внеш}}(h_x) = \Delta p \implies p_{\text{внеш}}(h_x) = p_{\text{внутр}} - \Delta p.$$

$$p_{\text{внеш}}(h_x) = 205\,800 \text{ Па} - 2000 \text{ Па} = 203\,800 \text{ Па}.$$

5. Внешнее гидростатическое давление на искомой глубине $h_x$:

$$p_{\text{внеш}}(h_x) = p_0 + \rho_в g h_x.$$

   Отсюда выражаем глубину $h_x$:

$$h_x = \frac{p_{\text{внеш}}(h_x) - p_0}{\rho_в g} = \frac{203\,800 \text{ Па} - 100\,000 \text{ Па}}{1000 \text{ кг/м}^3 \cdot 10 \text{ м/с}^2} = \frac{103\,800}{10\,000} \text{ м} = 10{,}38 \text{ м}.$$

   (При расчёте с $g = 9{,}8$ м/с$^2$: $p_1 = 590\,000$ Па; $p_{\text{внутр}} \approx 202\,370$ Па; $p_{\text{внеш}} = 200\,370$ Па; $h_x = \frac{100\,370}{9800} \approx 10{,}24$ м).

**Ответ:** $h_x \approx 10{,}38$ м (или $\approx 10{,}24$ м при $g = 9{,}8$ м/с$^2$).