Кинематика

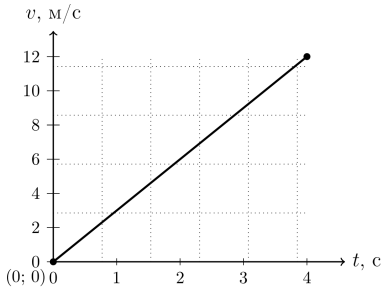
Преподаватель: Сорокина Василиса Ивановна

Задачи

Задача 1. Спидометр автомобиля показывает 108 км/ч. Сколько метров проезжает машина за 5 секунд?

Задача 2. Первую половину пути поезд ехал со скоростью 60 км/ч, а вторую — 40 км/ч. Найдите среднюю скорость на всём пути.

Задача 3. Тело движется вдоль оси X. На графике представлена зависимость скорости от времени $v(t)$. Найдите ускорение и путь за 4 секунды.



Задача 4. Велосипедист едет со скоростью 5 м/с и начинает тормозить с ускорением 0,5 м/с^2. Через сколько секунд он остановится?

Задача 5. С крыши дома высотой 20 м падает сосулька. Какую скорость она разовьёт у самой земли? ($g = 10$ м/с^2).

Задача 6. Поезд длиной 200 м проезжает мимо столба за 10 секунд. С какой скоростью движется поезд?

Задача 7. Два автомобиля движутся навстречу друг другу со скоростями 70 км/ч и 90 км/ч. Чему равна их скорость сближения?

Задача 8. Спортсмен пробегает дистанцию 400 м по стадиону и возвращается в точку старта. Чему равны пройденный путь и модуль перемещения?

Задача 9. На Луне ускорение свободного падения $g \approx 1{,}6$ м/с^2. Во сколько раз дольше будет падать камень с высоты 10 м на Луне, чем на Земле?

Задача 10. Катер движется равномерно со скоростью 10 м/с. За какое время он пройдёт 1 морскую милю (1852 метра)? Парсек — единица измерения расстояния, примерно равная 3,26 световым годам. Сколько времени занимает путь света от галактики Андромеды до Земли, если расстояние между ними равно 780 килопарсек? Ответ выразите в миллионах лет, округлив до десятых.

Задача 11. Сколько времени до нас идёт свет от Сириуса, если расстояние от Земли до Сириуса 8,611 световых лет?

Задача 12. В настоящее время МКС движется вокруг Земли по круговой орбите, радиус которой равен 6786 км. Определите путь, который проходит эта станция за один полный оборот вокруг центра Земли. Ответ представьте в км, округлив до целых.

Задача 13. В настоящее время МКС движется вокруг Земли по круговой орбите, радиус которой равен 6786 км. Определите промежуток времени, за который станция совершает один полный оборот вокруг центра Земли, если скорость обращения станции 7,66 км/с. Ответ представьте в часах, округлив до сотых.

Задача 14. В 2014 году в галактике M82, расположенной в созвездии Большой Медведицы, вспыхнула сверхновая звезда. Галактика удалена от нас на 3680 кпк. Когда на самом деле произошёл взрыв?

Задача 15. Инопланетные звездолёты решили поиграть в «догонялки». Скорость первого звездолёта 160 000 км/ч, он гонится за вторым звездолётом, скорость которого 100 000 км/ч. В начальный момент времени расстояние между ними 100 000 км. Когда второй звездолёт пролетел 80 000 км, дорогу ему перелетела комета. Как известно, это плохая примета, поэтому пилот остановил корабль и простоял 12 мин, после чего продолжил движение с прежней скоростью. Через какое время первый звездолёт догонит второй?

Задача 16. Оцените, насколько удалённый объект на поверхности Земли можно наблюдать с борта космического корабля, находящегося на высоте примерно 1600 км над поверхностью Земли. Радиус Земли примерно равен 6400 км.

Задача 17. Баскетбол. Игрок бросает мяч вертикально вверх с уровня груди (1,5 м) со скоростью 8 м/с. Через какое время мяч упадёт на пол?

Задача 18. Баллистика. Струя воды из брандспойта вылетает под углом 45°. Какова должна быть начальная скорость, чтобы погасить пламя на расстоянии 20 м?

Задача 19. Переправа. Моторная лодка держит курс перпендикулярно берегу. Скорость лодки в стоячей воде 4 м/с, скорость течения реки 3 м/с. Ширина реки 120 м. На сколько метров течение снесёт лодку?

Задача 20. Карусель. На каком расстоянии от центра вращения находится человек, если при периоде обращения 6 с его центростремительное ускорение равно $\pi^2/3$ м/с^2?

Задача 21. Два тела. Одно тело брошено вертикально вверх со скоростью 20 м/с. Через 1 секунду вслед за ним бросают второе тело с той же скоростью. На какой высоте они встретятся?

Задача 22. Астрономия. Планета движется вокруг звезды по круговой орбите. Если радиус орбиты увеличить в 4 раза, как изменится период?

Задача 23. Ускорение. Тело начало движение из состояния покоя. Ускорение 2 с было 3 м/с^2, затем 3 с было нулевым, затем 2 с было -2 м/с^2. Найдите финальную скорость.

Задача 24. Встреча. Из пункта А в Б выехал грузовик (60 км/ч). Одновременно из Б в А выехала легковушка (90 км/ч). Расстояние 300 км. Где и когда они встретятся?

Задача 25. Погоня. Полицейский автомобиль ($v_1 = 30$ м/с) находится в 100 м позади нарушителя ($v_2 = 25$ м/с). Через сколько времени и какой путь пройдёт полиция до момента обгона?

Задача 26. Угол обстрела. Пиратский корабль хочет обстрелять крепость на скале высотой H, находящуюся на расстоянии L. Какова минимальная начальная скорость ядра?

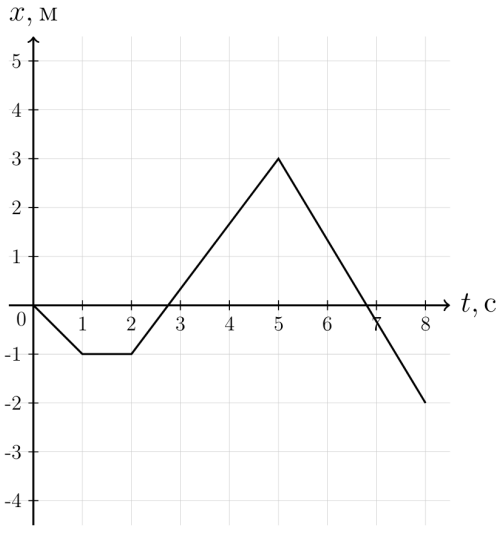
Задача 27. Кольцо. По кольцевой трассе длиной L в одном направлении едут два гонщика со скоростями v_1 и v_2. Сколько раз первый обгонит второго за время T?

Задача 28. Дождь. Капли дождя падают вертикально. Шофёр автомобиля, едущего со скоростью 72 км/ч, замечает, что капли оставляют на боковом стекле след под углом 60° к вертикали. Найдите скорость капель.

Задача 29. Муха на стержне. Стержень длиной L вращается с угловой скоростью ω. По нему от центра к краю бежит муха со скоростью u относительно стержня. Найдите полную скорость мухи в момент вылета со стержня.

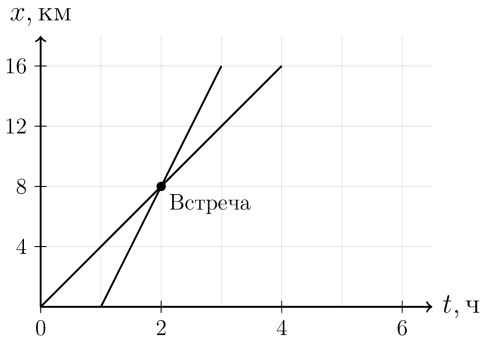
Задача 30. Оптимальный бросок. Под каким углом нужно бросить камень с крутого берега в море, чтобы дальность его падения от подножия берега была максимальной? (Высота берега h, скорость v_0).

Задача 31. На рисунке приведён график движения тела вдоль оси x. Какова проекция скорости тела v_x в промежутке от 5 до 8 с?



Задача 32. **Условие.** Двое туристов выходят с турбазы в разные моменты времени и идут по одной прямой дороге с постоянными скоростями (но каждый — со своей скоростью). На рисунке показаны графики зависимостей их координат x (ось OX направлена вдоль дороги) от времени t. Турбаза находится в начале координат.

1. Чему равна скорость туриста, который идёт быстрее? Ответ укажите в км/ч, округлив до целого числа.
2. Чему равна скорость туриста, который идёт медленнее? Ответ укажите в км/ч, округлив до целого числа.
3. На каком расстоянии от турбазы туристы встретятся? Ответ укажите в км, округлив до целого числа.



Решения

Задача 1. **Условие.** Спидометр автомобиля показывает 108 км/ч. Сколько метров проезжает машина за 5 секунд?

Решение. Переведём скорость автомобиля в единицы СИ:

$$v = 108 \text{ км/ч} = \frac{108 \cdot 1000 \text{ м}}{3600 \text{ с}} = 30 \text{ м/с}.$$

При равномерном движении пройденный путь определяется формулой:

$$S = v \cdot t = 30 \text{ м/с} \cdot 5 \text{ с} = 150 \text{ м}.$$

Ответ: 150 м.

Задача 2. **Условие.** Первую половину пути поезд ехал со скоростью 60 км/ч, а вторую — 40 км/ч. Найдите среднюю скорость на всём пути.

Решение. Пусть весь путь равен $2S$, тогда первая половина пути равна S, и вторая половина пути равна S.

Время, затраченное на первую половину пути: $t_1 = \frac{S}{v_1}$. Время, затраченное на вторую половину пути: $t_2 = \frac{S}{v_2}$. Полное время движения:

$$t_{\text{все}} = t_1 + t_2 = \frac{S}{v_1} + \frac{S}{v_2} = S\left(\frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}\right).$$

Средняя скорость определяется как отношение всего пути ко всему времени:

$$v_{\text{ср}} = \frac{2S}{t_{\text{все}}} = \frac{2S}{S \cdot \frac{v_1+v_2}{v_1 v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}.$$

Подставим числовые значения:

$$v_{\text{ср}} = \frac{2 \cdot 60 \cdot 40}{60 + 40} = \frac{4800}{100} = 48 \text{ км/ч}.$$

Ответ: 48 км/ч.

Задача 3. **Условие.** Тело движется вдоль оси X. На графике представлена зависимость скорости от времени $v(t)$. Найдите ускорение и путь за 4 секунды.

Решение. График представляет собой прямую линию, следовательно, движение равноускоренное с начальной скоростью $v_0 = 0$.

1. Ускорение a найдём по определению:
$$a = \frac{v(4) - v(0)}{t} = \frac{12 \text{ м/с} - 0 \text{ м/с}}{4 \text{ с}} = 3 \text{ м/с}^2.$$
2. Пройденный путь за 4 секунды равен площади под графиком $v(t)$ (площадь прямоугольного треугольника с катетами $t = 4$ с и $v = 12$ м/с):
$$S = \frac{1}{2} \cdot t \cdot v = \frac{1}{2} \cdot 4 \text{ с} \cdot 12 \text{ м/с} = 24 \text{ м}.$$
Также путь можно рассчитать по формуле:
$$S = \frac{at^2}{2} = \frac{3 \cdot 4^2}{2} = 24 \text{ м}.$$

Ответ: $a = 3$ м/с^2, $S = 24$ м.

Задача 4. **Условие.** Велосипедист едет со скоростью 5 м/с и начинает тормозить с ускорением 0,5 м/с^2. Через сколько секунд он остановится?

Решение. Уравнение скорости при равнозамедленном движении до полной остановки ($v = 0$):
$$v = v_0 - at \implies 0 = v_0 - at \implies t = \frac{v_0}{a}.$$
Подставим данные:
$$t = \frac{5 \text{ м/с}}{0{,}5 \text{ м/с}^2} = 10 \text{ с}.$$

Ответ: 10 с.

Задача 5. **Условие.** С крыши дома высотой 20 м падает сосулька. Какую скорость она разовьёт у самой земли? ($g = 10$ м/с^2).

Решение. Свободное падение происходит без начальной скорости ($v_0 = 0$). Связь скорости, высоты и ускорения свободного падения:
$$v^2 = 2gh \implies v = \sqrt{2gh}.$$
Подставим числовые значения:
$$v = \sqrt{2 \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 20 \text{ м}} = \sqrt{400} = 20 \text{ м/с}.$$

Ответ: 20 м/с.

Задача 6. **Условие.** Поезд длиной 200 м проезжает мимо столба за 10 секунд. С какой скоростью движется поезд?

Решение. Проезжая мимо неподвижного столба (точечного ориентира), поезд проходит расстояние, равное собственной длине L:
$$S = L = 200 \text{ м}.$$
Следовательно, скорость поезда:
$$v = \frac{L}{t} = \frac{200 \text{ м}}{10 \text{ с}} = 20 \text{ м/с} \quad (72 \text{ км/ч}).$$

Ответ: 20 м/с (или 72 км/ч).

Задача 7. **Условие.** Два автомобиля движутся навстречу друг другу со скоростями 70 км/ч и 90 км/ч. Чему равна их скорость сближения?

Решение. При движении тел навстречу друг другу проекции их скоростей имеют противоположные знаки. Модуль скорости сближения равен сумме скоростей:

$$v_{\text{сбл}} = v_1 + v_2 = 70 \text{ км/ч} + 90 \text{ км/ч} = 160 \text{ км/ч}.$$

Ответ: 160 км/ч.

Задача 8. **Условие.** Спортсмен пробегает дистанцию 400 м по стадиону и возвращается в точку старта. Чему равны пройденный путь и модуль перемещения?

Решение.

1. Путь S — это длина траектории движения, поэтому $S = 400$ м.
2. Перемещение $\Delta\vec{r}$ — вектор, соединяющий начальное и конечное положение тела. Так как спортсмен вернулся в точку старта, начальная и конечная точки совпадают, следовательно:
$$|\Delta\vec{r}| = 0 \text{ м}.$$

Ответ: путь равен 400 м, модуль перемещения равен 0 м.

Задача 9. **Условие.** На Луне ускорение свободного падения $g \approx 1{,}6$ м/с^2. Во сколько раз дольше будет падать камень с высоты 10 м на Луне, чем на Земле?

Решение. Время падения с высоты h без начальной скорости:

$$h = \frac{gt^2}{2} \implies t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Для Луны ($g_1 = 1{,}6$ м/с^2) и Земли ($g_3 = 10$ м/с^2):

$$\frac{t_1}{t_3} = \frac{\sqrt{\frac{2h}{g_1}}}{\sqrt{\frac{2h}{g_3}}} = \sqrt{\frac{g_3}{g_1}} = \sqrt{\frac{10}{1{,}6}} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5.$$

Примечание: если принять стандартное земное значение $g_3 = 9{,}8$ м/с^2, то:

$$\frac{t_1}{t_3} = \sqrt{\frac{9{,}8}{1{,}6}} = \sqrt{6{,}125} \approx 2{,}47.$$

Ответ: в 2,5 раза (или приблизительно в 2,47 раза при $g_3 = 9{,}8$ м/с^2).

Задача 10. **Условие.** Катер движется равномерно со скоростью 10 м/с. За какое время он пройдёт 1 морскую милю (1852 метра)? Парсек — единица измерения расстояния, примерно равная 3,26 световым годам. Сколько времени занимает путь света от галактики Андромеды до Земли, если расстояние между ними равно 780 килопарсек? Ответ выразите в миллионах лет, округлив до десятых.

Решение.

1. Время движения катера:
$$t = \frac{S}{v} = \frac{1852 \text{ м}}{10 \text{ м/с}} = 185{,}2 \text{ с} = 3 \text{ мин } 5{,}2 \text{ с}.$$

2. Найдём расстояние до галактики Андромеды в световых годах:

$$D = 780 \text{ кпк} = 780 \cdot 10^3 \text{ пк}.$$

Так как 1 пк $\approx$ 3,26 св. лет, получаем:

$$D = 780\,000 \cdot 3{,}26 \text{ св. лет} = 2\,542\,800 \text{ св. лет} \approx 2{,}54 \text{ млн св. лет}.$$

По определению, свет преодолевает расстояние в 1 световой год ровно за 1 год. Следовательно, свет от галактики Андромеды идёт до Земли:

$$t_{\text{св}} \approx 2{,}54 \text{ млн лет} \approx 2{,}5 \text{ млн лет}.$$

Ответ: 185,2 с (катер); 2,5 млн лет (свет).

Задача 11. Условие. Сколько времени до нас идёт свет от Сириуса, если расстояние от Земли до Сириуса 8,611 световых лет?

Решение. Световой год — это расстояние, проходимое светом в вакууме за один земной тропический год. Соответственно, расстояние в 8,611 световых лет свет преодолевает ровно за 8,611 лет.

Ответ: 8,611 лет (около 8 лет и 7 месяцев).

Задача 12. Условие. В настоящее время МКС движется вокруг Земли по круговой орбите, радиус которой равен 6786 км. Определите путь, который проходит эта станция за один полный оборот вокруг центра Земли. Ответ представьте в км, округлив до целых.

Решение. Длина орбиты станции за один полный оборот равна длине окружности радиуса $R = 6786$ км:

$$L = 2\pi R = 2 \cdot 3{,}14159 \cdot 6786 \text{ км} \approx 42\,637{,}76 \text{ км}.$$

Округляя до целых, получаем 42 638 км.

Ответ: 42 638 км.

Задача 13. Условие. В настоящее время МКС движется вокруг Земли по круговой орбите, радиус которой равен 6786 км. Определите промежуток времени, за который станция совершает один полный оборот вокруг центра Земли, если скорость обращения станции 7,66 км/с. Ответ представьте в часах, округлив до сотых.

Решение. Длина круговой орбиты: $L = 2\pi R \approx 42\,637{,}76$ км.

Период обращения в секундах:

$$T = \frac{L}{v} = \frac{42\,637{,}76 \text{ км}}{7{,}66 \text{ км/с}} \approx 5566{,}29 \text{ с}.$$

Переведём период обращения в часы:

$$T_{\text{ч}} = \frac{5566{,}29}{3600} \approx 1{,}5462 \text{ ч} \approx 1{,}55 \text{ ч}.$$

Ответ: 1,55 ч (или приблизительно 93 минуты).

Задача 14. **Условие.** В 2014 году в галактике M82, расположенной в созвездии Большой Медведицы, вспыхнула сверхновая звезда. Галактика удалена от нас на 3680 кпк. Когда на самом деле произошёл взрыв?

Решение. Найдём расстояние до галактики в световых годах:

$$D = 3680 \text{ кпк} = 3680 \cdot 10^3 \text{ пк}.$$

Используя соотношение 1 пк $\approx 3{,}26$ св. лет:

$$D = 368\,000 \cdot 3{,}26 \approx 1\,199\,600 \text{ св. лет} \approx 1{,}2 \text{ млн световых лет}.$$

Следовательно, свет от взрыва шёл до Земли приблизительно 1,2 миллиона лет. Поскольку вспышка наблюдалась на Земле в 2014 году, сам взрыв произошёл примерно за 1,2 миллиона лет до нашей эры.

Ответ: приблизительно 1,2 миллиона лет назад (около 1,2 млн лет до н. э.).

Задача 15. **Условие.** Инопланетные звездолёты решили поиграть в «догонялки». Скорость первого звездолёта 160 000 км/ч, он гонится за вторым звездолётом, скорость которого 100 000 км/ч. В начальный момент времени расстояние между ними 100 000 км. Когда второй звездолёт пролетел 80 000 км, дорогу ему перелетела комета. Как известно, это плохая примета, поэтому пилот остановил корабль и простоял 12 мин, после чего продолжил движение с прежней скоростью. Через какое время первый звездолёт догонит второй?

Решение. Пусть начальное положение первого звездолёта $x_1(0) = 0$, тогда второго $x_2(0) = 100\,000$ км.

1. Время, за которое второй корабль пролетел $S = 80\,000$ км до остановки:

$$t_1 = \frac{80\,000 \text{ км}}{100\,000 \text{ км/ч}} = 0{,}8 \text{ ч} = 48 \text{ мин}.$$

   Координата второго звездолёта в момент остановки:

$$x_2 = 100\,000 + 80\,000 = 180\,000 \text{ км}.$$

   Координата первого звездолёта за время t_1:

$$x_1 = 160\,000 \cdot 0{,}8 = 128\,000 \text{ км}.$$

   Расстояние между ними в момент начала остановки второго:

$$\Delta x_1 = 180\,000 - 128\,000 = 52\,000 \text{ км}.$$

2. Второй корабль стоит время $\Delta t_{\text{ст}} = 12$ мин $= \frac{12}{60}$ ч $= 0{,}2$ ч. За это время первый корабль пролетает путь:

$$\Delta S_1 = 160\,000 \text{ км/ч} \cdot 0{,}2 \text{ ч} = 32\,000 \text{ км}.$$

   Новое расстояние между кораблями:

$$\Delta x_2 = 52\,000 - 32\,000 = 20\,000 \text{ км}.$$

   Общее время, прошедшее от начала движения:

$$t_{\text{прошло}} = t_1 + \Delta t_{\text{ст}} = 0{,}8 + 0{,}2 = 1{,}0 \text{ ч}.$$

3. После возобновления движения скорость сближения равна:

$$v_{\text{сбл}} = v_1 - v_2 = 160\,000 - 100\,000 = 60\,000 \text{ км/ч}.$$

Время, необходимое для преодоления оставшегося расстояния Δx_2:

$$t_3 = \frac{20\,000 \text{ км}}{60\,000 \text{ км/ч}} = \frac{1}{3} \text{ ч} = 20 \text{ мин}.$$

4. Полное время погони:

$$T = t_{\text{прошло}} + t_3 = 1 + \frac{1}{3} \text{ ч} = \frac{4}{3} \text{ ч} = 1 \text{ ч } 20 \text{ мин} \quad (80 \text{ минут}).$$

Ответ: через 1,33 ч (1 ч 20 мин, или 80 минут).

Задача 16. Условие. Оцените, насколько удалённый объект на поверхности Земли можно наблюдать с борта космического корабля, находящегося на высоте примерно 1600 км над поверхностью Земли. Радиус Земли примерно равен 6400 км.

Решение. Пусть $R = 6400$ км — радиус Земли, $H = 1600$ км — высота полёта корабля. Расстояние от центра Земли до корабля равно $R + H = 6400 + 1600 = 8000$ км.

Луч зрения на самый удалённый видимый объект на поверхности касается Земли (касательная перпендикулярна радиусу Земли). Рассмотрим прямоугольный треугольник, образованный центром Земли, кораблём и точкой горизонта.

1. Расстояние по прямой (прямая видимость до горизонта):

$$d = \sqrt{(R+H)^2 - R^2} = \sqrt{8000^2 - 6400^2} = \sqrt{(8000-6400)(8000+6400)} = \sqrt{1600 \cdot 14\,400}.$$

$$d = 40 \cdot 120 = 4800 \text{ км}.$$

2. Расстояние вдоль искривлённой поверхности Земли (длина дуги). Угол α между направлением на корабль и точкой горизонта из центра Земли:

$$\cos\alpha = \frac{R}{R+H} = \frac{6400}{8000} = 0{,}8 \implies \alpha = \arccos(0{,}8) \approx 0{,}6435 \text{ рад } (\approx 36{,}87^\circ).$$

Длина дуги на поверхности Земли:

$$S_{\text{дуги}} = R \cdot \alpha = 6400 \text{ км} \cdot 0{,}6435 \approx 4118 \text{ км}.$$

Ответ: прямая дальность видимости составляет 4800 км (по дуге поверхности Земли — около 4120 км).

Задача 17. Условие. Баскетбол. Игрок бросает мяч вертикально вверх с уровня груди (1,5 м) со скоростью 8 м/с. Через какое время мяч упадёт на пол?

Решение. Направим координатную ось OY вертикально вверх, поместив начало координат на уровне пола. Уравнение движения мяча:

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

где $y_0 = 1{,}5$ м, $v_0 = 8$ м/с, $g = 10$ м/с^2.

В момент падения на пол $y(t) = 0$:

$$1{,}5 + 8t - 5t^2 = 0 \iff 5t^2 - 8t - 1{,}5 = 0 \iff 10t^2 - 16t - 3 = 0.$$

Найдём дискриминант:

$$D = (-16)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-3) = 256 + 120 = 376.$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{376} \approx 19{,}39.$$

Физический смысл имеет только положительный корень:

$$t = \frac{16 + 19{,}39}{20} \approx \frac{35{,}39}{20} \approx 1{,}77 \text{ с}.$$

Примечание: при расчёте с $g = 9{,}8$ м/с^2:

$$4{,}9t^2 - 8t - 1{,}5 = 0 \implies D = 64 + 29{,}4 = 93{,}4 \implies t = \frac{8 + 9{,}664}{9{,}8} \approx 1{,}80 \text{ с}.$$

Ответ: 1,77 с (при $g = 10$ м/с^2) или 1,80 с (при $g = 9{,}8$ м/с^2).

Задача 18. **Условие.** Баллистика. Струя воды из брандспойта вылетает под углом 45°. Какова должна быть начальная скорость, чтобы погасить пламя на расстоянии 20 м?

Решение. Дальность полёта струи при броске с уровня земли под углом α к горизонту выражается формулой:

$$L = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}.$$

При $\alpha = 45^\circ$ значение $\sin(2\alpha) = \sin(90^\circ) = 1$. Тогда:

$$L = \frac{v_0^2}{g} \implies v_0 = \sqrt{gL}.$$

Подставим известные величины:

- при $g = 9{,}8$ м/с^2: $v_0 = \sqrt{9{,}8 \cdot 20} = \sqrt{196} = 14$ м/с;
- при $g = 10$ м/с^2: $v_0 = \sqrt{10 \cdot 20} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \approx 14{,}14$ м/с.

Ответ: 14 м/с (при $g = 9{,}8$ м/с^2) или 14,1 м/с (при $g = 10$ м/с^2).

Задача 19. **Условие.** Переправа. Моторная лодка держит курс перпендикулярно берегу. Скорость лодки в стоячей воде 4 м/с, скорость течения реки 3 м/с. Ширина реки 120 м. На сколько метров течение снесёт лодку?

Решение. Движения лодки поперёк реки и вдоль реки независимы.

Время, необходимое лодке для пересечения реки шириной $d = 120$ м, определяется только поперечной скоростью:

$$t = \frac{d}{v_\text{л}} = \frac{120 \text{ м}}{4 \text{ м/с}} = 30 \text{ с}.$$

За это время река снесёт лодку вниз по течению на расстояние:

$$\Delta x = v_\text{реки} \cdot t = 3 \text{ м/с} \cdot 30 \text{ с} = 90 \text{ м}.$$

Ответ: 90 м.

Задача 20. **Условие.** Карусель. На каком расстоянии от центра вращения находится человек, если при периоде обращения 6 с его центростремительное ускорение равно $\pi^2/3$ м/с^2?

Решение. Угловая скорость вращения связана с периодом T:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Центростремительное ускорение выражается формулой:

$$a_{\text{ц}} = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R.$$

Выразим расстояние R от центра вращения:

$$R = \frac{a_{\text{ц}} T^2}{4\pi^2}.$$

Подставим заданные значения $T = 6$ с и $a_{\text{ц}} = \frac{\pi^2}{3}$ м/с^2:

$$R = \frac{\frac{\pi^2}{3} \cdot 6^2}{4\pi^2} = \frac{\frac{\pi^2}{3} \cdot 36}{4\pi^2} = \frac{12\pi^2}{4\pi^2} = 3 \text{ м}.$$

Ответ: 3 м.

Задача 21. **Условие.** Два тела. Одно тело брошено вертикально вверх со скоростью 20 м/с. Через 1 секунду вслед за ним бросают второе тело с той же скоростью. На какой высоте они встретятся?

Решение. Пусть первое тело брошено в момент $t = 0$. Его уравнение движения (при $g = 10$ м/с^2):

$$y_1(t) = v_0 t - \frac{g t^2}{2} = 20t - 5t^2.$$

Второе тело брошено в момент $\tau = 1$ с. Для $t \geq 1$ с его координата:

$$y_2(t) = v_0(t - \tau) - \frac{g(t-\tau)^2}{2} = 20(t-1) - 5(t-1)^2.$$

В момент встречи тела находятся на одинаковой высоте $y_1(t) = y_2(t)$:

$$20t - 5t^2 = 20t - 20 - 5(t^2 - 2t + 1).$$

Раскрывая скобки:

$$-5t^2 = -20 - 5t^2 + 10t - 5 \implies 10t - 25 = 0 \implies t = 2{,}5 \text{ с}.$$

Найдём высоту встречи, подставив время $t = 2{,}5$ с в выражение для y_1:

$$h = y_1(2{,}5) = 20 \cdot 2{,}5 - 5 \cdot (2{,}5)^2 = 50 - 5 \cdot 6{,}25 = 50 - 31{,}25 = 18{,}75 \text{ м}.$$

Ответ: 18,75 м.

Задача 22. **Условие.** Астрономия. Планета движется вокруг звезды по круговой орбите. Если радиус орбиты увеличить в 4 раза, как изменится период?

Решение. Согласно третьему закону Кеплера (или из равенства силы тяготения и центростремительной силы: $G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{4\pi^2 R}{T^2}$):

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{const} \implies T \propto R^{3/2}.$$

Если радиус орбиты увеличивается в 4 раза ($R_2 = 4R_1$):

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{3/2} = 4^{3/2} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8.$$

Период обращения увеличится в 8 раз.

Ответ: период увеличится в 8 раз.

Задача 23. **Условие.** Ускорение. Тело начало движение из состояния покоя. Ускорение 2 с было 3 м/с^2, затем 3 с было нулевым, затем 2 с было -2 м/с^2. Найдите финальную скорость.

Решение. Полное изменение скорости равно интегралу от ускорения по времени (или сумме изменений скорости на каждом участке $\Delta v = a\Delta t$).

1. 1-й участок ($t_1 = 2$ с, $a_1 = 3$ м/с^2, $v_0 = 0$):

$$v_1 = v_0 + a_1 t_1 = 0 + 3 \cdot 2 = 6 \text{ м/с}.$$

2. 2-й участок ($t_2 = 3$ с, $a_2 = 0$):

$$v_2 = v_1 + a_2 t_2 = 6 + 0 \cdot 3 = 6 \text{ м/с}.$$

3. 3-й участок ($t_3 = 2$ с, $a_3 = -2$ м/с^2):

$$v_3 = v_2 + a_3 t_3 = 6 + (-2) \cdot 2 = 6 - 4 = 2 \text{ м/с}.$$

Ответ: 2 м/с.

Задача 24. **Условие.** Встреча. Из пункта А в Б выехал грузовик (60 км/ч). Одновременно из Б в А выехала легковушка (90 км/ч). Расстояние 300 км. Где и когда они встретятся?

Решение. Скорость сближения грузовика и легкового автомобиля:

$$v_{\text{сбл}} = v_1 + v_2 = 60 \text{ км/ч} + 90 \text{ км/ч} = 150 \text{ км/ч}.$$

Время до встречи:

$$t = \frac{S}{v_{\text{сбл}}} = \frac{300 \text{ км}}{150 \text{ км/ч}} = 2 \text{ часа}.$$

Место встречи относительно пункта А:

$$x = v_1 \cdot t = 60 \text{ км/ч} \cdot 2 \text{ ч} = 120 \text{ км}.$$

Относительно пункта Б место встречи находится на расстоянии:

$$300 - 120 = 180 \text{ км}.$$

Ответ: встретятся через 2 часа на расстоянии 120 км от пункта А (или 180 км от пункта Б).

Задача 25. **Условие.** Погоня. Полицейский автомобиль ($v_1 = 30$ м/с) находится в 100 м позади нарушителя ($v_2 = 25$ м/с). Через сколько времени и какой путь пройдёт полиция до момента обгона?

Решение. Скорость сближения полицейского автомобиля с автомобилем нарушителя:

$$v_{\text{отн}} = v_1 - v_2 = 30 \text{ м/с} - 25 \text{ м/с} = 5 \text{ м/с}.$$

Время до обгона:

$$t = \frac{\Delta x}{v_{\text{отн}}} = \frac{100 \text{ м}}{5 \text{ м/с}} = 20 \text{ с}.$$

Путь, пройденный полицией за это время:

$$S_1 = v_1 \cdot t = 30 \text{ м/с} \cdot 20 \text{ с} = 600 \text{ м}.$$

Ответ: $t = 20$ с; путь полиции $S = 600$ м.

Задача 26. **Условие.** Угол обстрела. Пиратский корабль хочет обстрелять крепость на скале высотой H, находящуюся на расстоянии L. Какова минимальная начальная скорость ядра?

Решение. Поместим начало координат на корабле. Координаты крепости: $x = L$, $y = H$. Уравнения движения ядра:

$$x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t \implies t = \frac{L}{v_0 \cos\alpha},$$

$$y(t) = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Подставим выражение для времени t в уравнение для y:

$$H = L \operatorname{tg}\alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Используя тождество $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ и обозначив $k = \operatorname{tg}\alpha$, получаем квадратное уравнение относительно k:

$$\frac{gL^2}{2v_0^2}k^2 - Lk + \left(H + \frac{gL^2}{2v_0^2}\right) = 0.$$

Ядро сможет поразить цель, если это уравнение имеет хотя бы одно действительное решение, то есть его дискриминант неотрицателен ($D \geq 0$):

$$D = L^2 - 4 \cdot \frac{gL^2}{2v_0^2}\left(H + \frac{gL^2}{2v_0^2}\right) \geq 0.$$

Разделим обе части неравенства на $L^2 > 0$:

$$1 - \frac{2g}{v_0^2}\left(H + \frac{gL^2}{2v_0^2}\right) \geq 0 \iff 1 - \frac{2gH}{v_0^2} - \frac{g^2L^2}{v_0^4} \geq 0.$$

Умножим на $v_0^4 > 0$:

$$v_0^4 - 2gHv_0^2 - g^2L^2 \geq 0.$$

Выделим полный квадрат:

$$(v_0^2 - gH)^2 - g^2H^2 - g^2L^2 \geq 0 \implies (v_0^2 - gH)^2 \geq g^2(H^2 + L^2).$$

Извлекая квадратный корень:

$$v_0^2 - gH \geq g\sqrt{H^2 + L^2} \implies v_0^2 \geq g\left(H + \sqrt{L^2 + H^2}\right).$$

Таким образом, минимально возможная начальная скорость ядра равна:

$$v_{0,\min} = \sqrt{g\left(H + \sqrt{L^2 + H^2}\right)}.$$

Ответ: $v_{\min} = \sqrt{g(H + \sqrt{L^2 + H^2})}$.

Задача 27. **Условие.** Кольцо. По кольцевой трассе длиной L в одном направлении едут два гонщика со скоростями v_1 и v_2. Сколько раз первый обгонит второго за время T?

Решение. Будем считать, что $v_1 > v_2$ и в начальный момент времени $t = 0$ оба гонщика стартуют из одной точки.

В системе отсчёта, связанной со вторым гонщиком, первый движется со скоростью:

$$v_{\text{отн}} = v_1 - v_2.$$

Каждый новый обгон происходит в тот момент, когда первый гонщик преодолевает относительно второго дистанцию, кратную полной длине трассы L.

Время между двумя последовательными обгонами:

$$\Delta t = \frac{L}{v_1 - v_2}.$$

Общее число обгонов за время T равно целой части от отношения полного времени к периоду между обгонами:

$$N = \left\lfloor \frac{T}{\Delta t} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(v_1 - v_2)T}{L} \right\rfloor,$$

где $\lfloor x \rfloor$ — операция взятия целой части числа (полное количество совершённых круговых опережений).

В общем случае (если заранее неизвестно, кто быстрее):

$$N = \left\lfloor \frac{|v_1 - v_2|T}{L} \right\rfloor.$$

Ответ: $N = \left\lfloor \dfrac{|v_1 - v_2|T}{L} \right\rfloor$.

Задача 28. **Условие.** Дождь. Капли дождя падают вертикально. Шофёр автомобиля, едущего со скоростью 72 км/ч, замечает, что капли оставляют на боковом стекле след под углом $60°$ к вертикали. Найдите скорость капель.

Решение. Переведём скорость автомобиля в систему СИ:

$$v_a = 72 \text{ км/ч} = 20 \text{ м/с}.$$

В лабораторной системе отсчёта (Земля) скорость капель направлена вертикально вниз: $\vec{v}_k = (0, -u)$. Скорость автомобиля направлена горизонтально: $\vec{v}_a = (v_a, 0)$.

Скорость капель в системе отсчёта автомобиля определяется законом сложения скоростей:

$$\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_k - \vec{v}_a = (-v_a, -u).$$

Угол θ следа капли на стекле (относительно вертикали) определяется соотношением:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{|\vec{v}_{\text{отн},x}|}{|\vec{v}_{\text{отн},y}|} = \frac{v_a}{u}.$$

Отсюда вертикальная скорость падения капель:

$$u = \frac{v_a}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{20 \text{ м/с}}{\sqrt{3}} \approx 11{,}55 \text{ м/с} \quad (\approx 41{,}6 \text{ км/ч}).$$

Ответ: $u = \dfrac{20}{\sqrt{3}}$ м/с $\approx 11{,}55$ м/с (около 41,6 км/ч).

Задача 29. Условие. Муха на стержне. Стержень длиной L вращается с угловой скоростью ω. По нему от центра к краю бежит муха со скоростью u относительно стержня. Найдите полную скорость мухи в момент вылета со стержня.

Решение. В момент схода со стержня муха находится на краю стержня, то есть на расстоянии L от оси вращения.

Полная скорость мухи складывается из двух взаимно перпендикулярных составляющих:

1. Относительная радиальная скорость (вдоль стержня):

$$v_r = u.$$

2. Переносная тангенциальная скорость (обусловленная вращением стержня):

$$v_\tau = \omega L.$$

Так как радиальное и тангенциальное направления взаимно перпендикулярны ($v_r \perp v_\tau$), модуль полной скорости мухи находится по теореме Пифагора:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\tau^2} = \sqrt{u^2 + (\omega L)^2}.$$

Ответ: $v = \sqrt{u^2 + \omega^2 L^2}$.

Задача 30. Условие. Оптимальный бросок. Под каким углом нужно бросить камень с крутого берега в море, чтобы дальность его падения от подножия берега была максимальной? (Высота берега h, скорость v_0).

Решение. Поместим начало координат у подножия берега на уровне моря. Точка броска имеет координаты $(0, h)$.

Уравнения траектории камня, брошенного со скоростью v_0 под углом α к горизонту:

$$x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t \implies t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha},$$

$$y(x) = h + x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} = h + x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2\alpha).$$

Обозначим $k = \operatorname{tg}\alpha$, тогда уравнение для $y(x)$ при $y = 0$ (падение на уровне моря) даёт:

$$\frac{g L^2}{2 v_0^2} k^2 - L k + \left(\frac{g L^2}{2 v_0^2} - h \right) = 0.$$

Данное квадратное уравнение определяет угол α, обеспечивающий заданную дальность L. Чтобы дальность L была физически достижима, дискриминант этого уравнения должен быть неотрицательным:

$$D = L^2 - 4 \cdot \frac{gL^2}{2v_0^2}\left(\frac{gL^2}{2v_0^2} - h\right) \geq 0.$$

Разделим на L^2:

$$1 - \frac{2g}{v_0^2}\left(\frac{gL^2}{2v_0^2} - h\right) \geq 0 \iff 1 + \frac{2gh}{v_0^2} \geq \frac{g^2L^2}{v_0^4}.$$

Отсюда максимальная дальность падения:

$$L_{\max} = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

Максимальная дальность достигается при равенстве дискриминанта нулю ($D = 0$), когда уравнение имеет единственный корень:

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{L_{\max}}{2 \cdot \frac{gL_{\max}^2}{2v_0^2}} = \frac{v_0^2}{gL_{\max}}.$$

Подставим сюда выражение для $L_{\max}$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0^2}{g \cdot \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh}} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}.$$

Следовательно, оптимальный угол броска равен:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}\right).$$

Проверка: при $h = 0$ (бросок с плоской поверхности) получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2}} = 1 \implies \alpha = 45^\circ,$$

что в точности совпадает со стандартным результатом для броска на горизонтальную плоскость.

Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}\right)$.

Задача 31. **Условие.** На рисунке приведён график движения тела вдоль оси x. Какова проекция скорости тела v_x в промежутке от 5 до 8 с?

Решение. В интервале времени от $t_1 = 5$ с до $t_2 = 8$ с график зависимости координаты $x(t)$ представляет собой отрезок прямой линии. Это означает, что движение является равномерным, и проекция скорости постоянна:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

По графику находим координаты тела в эти моменты времени:

$$x(5) = 3 \text{ м}, \quad x(8) = -2 \text{ м}.$$

Тогда:

$$v_x = \frac{-2 - 3}{8 - 5} = \frac{-5}{3} \approx -1{,}67 \text{ м/с} \approx -1{,}7 \text{ м/с}.$$

Ответ: $-1{,}7$ м/с.

Задача 32. Условие. Двое туристов выходят с турбазы в разные моменты времени и идут по одной прямой дороге с постоянными скоростями (но каждый — со своей скоростью). На рисунке показаны графики зависимостей их координат x (ось OX направлена вдоль дороги) от времени t. Турбаза находится в начале координат. Найдите скорости обоих туристов и место их встречи.

Решение. По графику определим уравнения движения каждого туриста:

- Первый турист выходит в момент времени $t = 0$ из точки $x = 0$ и к моменту $t = 4$ ч достигает координаты $x = 16$ км. Его скорость:

$$v_1 = \frac{16 \text{ км} - 0 \text{ км}}{4 \text{ ч} - 0 \text{ ч}} = 4 \text{ км/ч}.$$

- Второй турист выходит позже, в момент $t = 1$ ч из точки $x = 0$, и к моменту $t = 3$ ч достигает координаты $x = 16$ км. Его скорость:

$$v_2 = \frac{16 \text{ км} - 0 \text{ км}}{3 \text{ ч} - 1 \text{ ч}} = \frac{16}{2} = 8 \text{ км/ч}.$$

1. Скорость более быстрого туриста: $v_2 = 8$ км/ч.
2. Скорость более медленного туриста: $v_1 = 4$ км/ч.
3. Запишем законы движения туристов:

$$x_1(t) = 4t, \quad x_2(t) = 8(t - 1).$$

В момент встречи координаты туристов совпадают: $x_1(t) = x_2(t)$:

$$4t = 8(t - 1) \implies 4t = 8t - 8 \implies 4t = 8 \implies t = 2 \text{ ч}.$$

Координата места встречи:

$$x_{\text{встр}} = 4 \cdot 2 = 8 \text{ км}.$$

Ответ: 1) 8 км/ч; 2) 4 км/ч; 3) 8 км.