Статика и равновесие

Преподаватель: Сорокина Василиса Ивановна

Задачи

Задача 1. Два металлических шара: свинцовый и железный — уравновешены на разноплечих весах. При опускании шаров в воду равновесие не нарушилось. Попробуйте найти объяснение этому явлению.

Задача 2. Две звезды массами M и $2M$ вращаются вокруг общего центра масс. Каково отношение сил притяжения, действующих на них? Каково отношение их ускорений?

Задача 3. По внутренней поверхности конуса, стоящего на вершине (угол при вершине 2α), вращается шарик на высоте h от вершины. Трения нет. Найдите необходимую скорость вращения v.

Задача 4. На прямой между Землёй ($M_З = 6 \cdot 10^{24}$ кг) и Солнцем ($M_С = 2 \cdot 10^{30}$ кг) есть точки, в которых притяжение со стороны Земли и со стороны Солнца уравновешены. Найдите эти точки.

Задача 5. На гладкой горизонтальной поверхности лежат два бруска с массами m_1 и m_2, соединённые невесомой нерастяжимой нитью. Внешняя сила F приложена к телу m_1 и направлена горизонтально. Найдите установившееся ускорение системы и силу натяжения нити.

Решения

Задача 1. **Условие.** Два металлических шара: свинцовый и железный — уравновешены на разноплечих весах. При опускании шаров в воду равновесие не нарушилось. Попробуйте найти объяснение этому явлению.

Решение. Пусть массы шаров m_1 и m_2, их объёмы V_1 и V_2, а плечи весов l_1 и l_2. Условие равновесия весов в воздухе (пренебрегая выталкивающей силой воздуха):

$$m_1 g l_1 = m_2 g l_2 \implies m_1 l_1 = m_2 l_2.$$

При полном погружении шаров в воду на каждый действует архимедова сила $F_A = \rho_в g V$. Условие сохранения равновесия в воде:

$$(m_1 g - \rho_в g V_1) l_1 = (m_2 g - \rho_в g V_2) l_2.$$

Раскрывая скобки и учитывая, что $m_1 l_1 = m_2 l_2$, получаем:

$$\rho_в g V_1 l_1 = \rho_в g V_2 l_2 \implies V_1 l_1 = V_2 l_2.$$

Разделим первое равенство на второе:

$$\frac{m_1 l_1}{V_1 l_1} = \frac{m_2 l_2}{V_2 l_2} \implies \frac{m_1}{V_1} = \frac{m_2}{V_2} \implies \rho_{1,\text{ср}} = \rho_{2,\text{ср}}.$$

Таким образом, средние плотности обоих тел обязаны быть строго одинаковыми. Однако плотность сплошного свинца ($\rho_{\text{св}} \approx 11{,}3$ г/см^3) значительно больше плотности железа ($\rho_{\text{жел}} \approx 7{,}8$ г/см^3). Следовательно, свинцовый шар не может быть сплошным: внутри более тяжёлого свинцового шарика обязательно имеется полость.

Ответ: в более тяжёлом шарике есть полость.

Задача 2. **Условие.** Две звезды массами M и $2M$ вращаются вокруг общего центра масс. Каково отношение сил притяжения, действующих на них? Каково отношение их ускорений?

Решение.

1. **Отношение сил.** Согласно закону всемирного тяготения и третьему закону Ньютона, две звезды притягиваются друг к другу силами, равными по величине и противоположными по направлению:

$$F_1 = F_2 = G\frac{M \cdot 2M}{d^2},$$

где d — расстояние между звёздами. Следовательно, отношение сил взаимного притяжения равно:

$$\frac{F_1}{F_2} = 1.$$

2. **Отношение ускорений.** Запишем второй закон Ньютона для каждой из звёзд:

$$a_1 = \frac{F}{M}, \quad a_2 = \frac{F}{2M}.$$

Найдём отношение ускорения звезды меньшей массы к ускорению более массивной звезды:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{F/M}{F/(2M)} = \frac{2M}{M} = 2.$$

Ответ: отношение сил равно 1; отношение ускорений $a_1/a_2 = 2$ (ускорение менее массивной звезды в 2 раза больше).

Задача 3. **Условие.** По внутренней поверхности конуса, стоящего на вершине (угол при вершине 2α), вращается шарик на высоте h от вершины. Трения нет. Найдите необходимую скорость вращения v.

Решение.

1. Вертикальное сечение конуса симметрично относительно оси Oz. Угол раствора конуса равен 2α, значит угол между образующей конуса и вертикальной осью равен α.

2. Радиус горизонтальной окружности, по которой движется шарик на высоте h:

$$R = h \operatorname{tg} \alpha.$$

3. На шарик действуют две силы:

   - сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вниз;
   - сила нормальной реакции $\vec{N}$, перпендикулярная гладкой образующей конуса.

4. Поскольку образующая наклонена к вертикали под углом α, нормаль N наклонена к горизонту под углом α (и составляет угол $90^\circ - \alpha$ с вертикалью).

5. Проецируем силы на оси координат:

$$\begin{cases} Oy \text{ (вертикаль)}: N\sin\alpha - mg = 0 \implies N\sin\alpha = mg, \\ Ox \text{ (к центру вращения)}: N\cos\alpha = m\dfrac{v^2}{R}. \end{cases}$$

6. Разделим второе уравнение на первое:

$$\frac{N\cos\alpha}{N\sin\alpha} = \frac{mv^2/R}{mg} \implies \operatorname{ctg}\alpha = \frac{v^2}{gR}.$$

7. Отсюда выразим квадрат линейной скорости v^2:

$$v^2 = gR\operatorname{ctg}\alpha.$$

8. Подставим радиус траектории $R = h\operatorname{tg}\alpha$:

$$v^2 = g(h\operatorname{tg}\alpha)\operatorname{ctg}\alpha = gh.$$

9. Следовательно:

$$v = \sqrt{gh}.$$

Ответ: $v = \sqrt{gh}$.

Задача 4. Условие. На прямой между Землёй ($M_З = 6 \cdot 10^{24}$ кг) и Солнцем ($M_С = 2 \cdot 10^{30}$ кг) есть точки, в которых притяжение со стороны Земли и со стороны Солнца уравновешены. Найдите эти точки.

Решение.

1. Пусть расстояние между центрами Солнца и Земли равно $R \approx 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м (1 а.е.).

2. Обозначим расстояние от Земли до искомой точки через r. Тогда расстояние от этой точки до центра Солнца равно $R - r$.

3. По условию задачи силы тяготения к Земле и к Солнцу в этой точке строго уравновешивают друг друга:

$$F_З = F_С \implies G\frac{M_З m}{r^2} = G\frac{M_С m}{(R-r)^2}.$$

4. Сократим на гравитационную постоянную G и пробную массу m:

$$\frac{M_З}{r^2} = \frac{M_С}{(R-r)^2} \implies \left(\frac{R-r}{r}\right)^2 = \frac{M_С}{M_З}.$$

5. Извлечём квадратный корень (так как точка находится строго между Землёй и Солнцем, $0 < r < R$):

$$\frac{R}{r} - 1 = \sqrt{\frac{M_С}{M_З}} \implies r = \frac{R}{1 + \sqrt{\frac{M_С}{M_З}}}.$$

6. Вычислим отношение масс:

$$\frac{M_С}{M_З} = \frac{2 \cdot 10^{30}}{6 \cdot 10^{24}} = \frac{1}{3} \cdot 10^6 \approx 333\,333.$$

$$\sqrt{\frac{M_С}{M_З}} \approx \sqrt{333\,333} \approx 577{,}35.$$

7. Найдём расстояние r от Земли:

$$r = \frac{1{,}5 \cdot 10^{11}\text{ м}}{1 + 577{,}35} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{11}\text{ м}}{578{,}35} \approx 2{,}59 \cdot 10^{8}\text{ м} \approx 259\,000\text{ км}.$$

8. **Физическое примечание.** В небесной механике истинная точка Лагранжа L1 вращается вместе с системой Солнце–Земля, и равенство сил включает центробежную силу:

$$F_C - F_З = m\omega^2(R - r).$$

С учётом вращения истинное расстояние до L1 составляет:

$$r_{L1} \approx R\sqrt[3]{\frac{M_З}{3M_C}} \approx 1{,}5 \cdot 10^{6}\text{ км}.$$

Однако по прямому условию задачи (чистая компенсация гравитационных сил) расстояние составляет около 259 000 км от Земли.

Ответ: на расстоянии $r \approx 2{,}59 \cdot 10^{8}$ м ($\approx 259\,000$ км) от Земли по направлению к Солнцу.

Задача 5. **Условие.** На гладкой горизонтальной поверхности лежат два бруска с массами m_1 и m_2, соединённые невесомой нерастяжимой нитью. Внешняя сила F приложена к телу m_1 и направлена горизонтально. Найдите установившееся ускорение системы и силу натяжения нити.

Решение.

1. Так как поверхность гладкая, трение отсутствует. Нить невесома и нерастяжима, поэтому оба бруска движутся с одинаковым ускорением a. Запишем уравнения второго закона Ньютона для каждого тела:

$$\begin{cases} m_1 a = F - T, \\ m_2 a = T. \end{cases}$$

2. Складывая эти два уравнения, находим ускорение системы:

$$(m_1 + m_2)a = F \implies a = \frac{F}{m_1 + m_2}.$$

3. Подставляя найденное ускорение во второе уравнение, получаем силу натяжения нити:

$$T = m_2 a = F\frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Ответ: $a = \dfrac{F}{m_1 + m_2}$, $T = F\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}$.