Динамика. Законы Ньютона

Преподаватель: Сорокина Василиса Ивановна

Задачи

Задача 1. Мальчик тянет санки массой 5 кг с горизонтальной силой 10 Н. Коэффициент трения между полозьями и снегом $\mu = 0{,}1$. Чему равно ускорение санок? Принять $g = 10$ м/с^2.

Задача 2. Человек массой 70 кг стоит на весах в лифте. Что покажут весы (в ньютонах), если лифт начнёт разгоняться вниз с ускорением 2 м/с^2? Принять $g = 10$ м/с^2.

Задача 3. Ускорение свободного падения на Марсе $g_M \approx 3{,}7$ м/с^2. Каков будет вес марсохода массой 900 кг на поверхности планеты?

Задача 4. Грузовик массой 5 тонн сталкивается с легковым автомобилем массой 1 тонна. Сила, с которой грузовик подействовал на легковушку, равна 10 кН. С какой силой легковушка подействовала на грузовик?

Задача 5. Водитель резко затормозил, колёса заблокировались. Сколько времени будет тормозить машина до полной остановки, если она ехала со скоростью 20 м/с, а $\mu = 0{,}5$? Принять $g = 10$ м/с^2.

Задача 6. На тело массой 2 кг действуют две взаимно перпендикулярные силы: 3 Н и 4 Н. Найдите модуль ускорения этого тела.

Задача 7. Во сколько раз уменьшится сила притяжения космонавта к Земле при его подъёме на высоту, равную радиусу Земли?

Задача 8. Шарик массой 100 г падает в воде с постоянной скоростью. Чему равна сумма силы сопротивления воды и силы Архимеда, действующих на шарик? Принять $g = 10$ м/с^2.

Задача 9. Брусок массой m соскальзывает с наклонной плоскости под углом $\alpha = 30^\circ$. Найдите ускорение, если $\mu = 0{,}2$. При каком μ брусок будет сползать равномерно? Принять $g = 10$ м/с^2.

Задача 10. Выведите формулу первой космической скорости для планеты массой M и радиусом R, приравняв силу тяжести к центростремительной силе ($ma_{\text{ц}}$).

Задача 11. В кузове грузовика лежит ящик. С каким максимальным ускорением может разгоняться грузовик, чтобы ящик не начал скользить, если $\mu = 0{,}4$? Принять $g = 10$ м/с^2.

Задача 12. Лётчик массой 80 кг выполняет в верхней точке петли Нестерова радиусом 200 м манёвр со скоростью 360 км/ч. Какова сила давления лётчика на кресло? Принять $g = 10$ м/с^2.

Задача 13. Космическая станция в форме бублика радиусом 100 м вращается вокруг своей оси. С какой угловой скоростью она должна вращаться, чтобы на внешнем ободе создалась «искусственная гравитация», равная земной ($g = 9{,}8$ м/с^2)?

Задача 14. Нить выдерживает натяжение 40 Н. На нити подвешен груз массой 2 кг. С каким максимальным ускорением можно поднимать этот груз вверх, чтобы нить не порвалась? Принять $g = 10$ м/с^2.

Задача 15. Автомобиль проезжает через выпуклый мост радиусом кривизны 40 м. При какой скорости автомобиль в верхней точке моста «станет невесомым»? Принять $g = 10$ м/с^2.

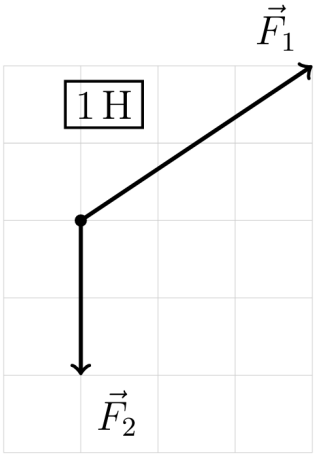
Задача 16. Две звезды массами M и $2M$ вращаются вокруг общего центра масс. Каково отношение сил притяжения, действующих на них? Каково отношение их ускорений?

Задача 17. Космонавт массой m приближается к чёрной дыре массой M. Найти разность сил (приливную силу), действующих на ноги и голову космонавта, если его рост h, а расстояние до центра дыры $r \gg h$.

Задача 18. По внутренней поверхности конуса, стоящего на вершине (угол при вершине 2α), вращается шарик на высоте h от вершины. Трения нет. Найдите необходимую скорость вращения v.

Задача 19. На прямой между Землёй ($M_З = 6 \cdot 10^{24}$ кг) и Солнцем ($M_С = 2 \cdot 10^{30}$ кг) есть точки, в которых притяжение со стороны Земли и со стороны Солнца уравновешены. Найдите эти точки.

Задача 20. На рисунке показаны силы (в заданном масштабе 1 клетка = 1 Н), действующие на материальную точку. Определите модуль равнодействующей этих сил. Ответ дайте в Н.



Задача 21. На тело массой 2 кг действуют две силы 6 Н и 8 Н, направленные под углом 90° друг к другу. Найдите ускорение тела.

Задача 22. На тело массой 5 кг, движущееся со скоростью 4 м/с, начинают действовать сила 10 Н и сила сопротивления 4 Н. Найдите изменение кинетической энергии за 3 с.

Задача 23. Тело массой 2 кг скользит вниз по наклонной плоскости с углом 30° к горизонту. Коэффициент трения 0,2. Найдите ускорение тела.

Задача 24. Тело массой 10 кг тянут по горизонтальной плоскости, прикладывая силу 50 Н, направленную под углом 30° к горизонту. Ускорение тела 3,5 м/с^2. Найдите коэффициент трения между телом и плоскостью.

Задача 25. На гладкой горизонтальной поверхности лежат два бруска с массами m_1 и m_2, соединённые невесомой нерастяжимой нитью. Внешняя сила F приложена к телу m_1 и направлена горизонтально. Найдите установившееся ускорение системы и силу натяжения нити.

Задача 26. Сферический булыжник радиусом 1 м с плотностью 3 г/см^3 движется по круговой орбите вокруг звезды солнечной массы на расстоянии 1,5 а.е. Оцените его орбитальную скорость. Сравните кинетическую энергию столкновения двух таких булыжников и предельную энергию их разрушения, равную 10^6 Дж.

Решения

Задача 1. Условие. Мальчик тянет санки массой 5 кг с горизонтальной силой 10 Н. Коэффициент трения между полозьями и снегом $\mu = 0{,}1$. Чему равно ускорение санок? Принять $g = 10$ м/с^2.

Решение.

1. Рассмотрим силы, действующие на санки:
   - по вертикали: сила тяжести $m\vec{g}$ (вниз) и сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$ (вверх);
   - по горизонтали: сила тяги $\vec{F}$ (в направлении движения) и сила трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (против движения).
2. Так как по вертикали движения нет, ускорение $a_y = 0$:
$$N - mg = 0 \implies N = mg = 5 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 = 50 \text{ Н}.$$
3. Сила трения скольжения определяется законом Амонтона–Кулона:
$$F_{\text{тр}} = \mu N = 0{,}1 \cdot 50 \text{ Н} = 5 \text{ Н}.$$
4. Запишем второй закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось движения Ox:
$$F - F_{\text{тр}} = ma.$$
5. Выразим и вычислим ускорение a:
$$a = \frac{F - F_{\text{тр}}}{m} = \frac{10 \text{ Н} - 5 \text{ Н}}{5 \text{ кг}} = \frac{5}{5} = 1 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: 1 м/с^2.

Задача 2. **Условие.** Человек массой 70 кг стоит на весах в лифте. Что покажут весы (в ньютонах), если лифт начнёт разгоняться вниз с ускорением 2 м/с^2? Принять $g = 10$ м/с^2.

Решение.

1. На человека действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ (вниз) и сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$ со стороны весов (вверх).

2. Ускорение $\vec{a}$ направлено вертикально вниз. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось, направленную вниз:

$$mg - N = ma \implies N = m(g - a).$$

3. По третьему закону Ньютона вес тела P (сила, с которой человек действует на весы) по модулю равен силе реакции опоры:

$$P = N = m(g - a).$$

4. Подставим численные значения:

$$P = 70 \text{ кг} \cdot (10 \text{ м/с}^2 - 2 \text{ м/с}^2) = 70 \cdot 8 = 560 \text{ Н}.$$

Ответ: 560 Н.

Задача 3. **Условие.** Ускорение свободного падения на Марсе $g_M \approx 3{,}7$ м/с^2. Каков будет вес марсохода массой 900 кг на поверхности планеты?

Решение.

1. Если тело покоится на горизонтальной неподвижной поверхности планеты, его вес равен силе тяжести:

$$P = mg_M.$$

2. Подставим числовые данные:

$$P = 900 \text{ кг} \cdot 3{,}7 \text{ м/с}^2 = 3330 \text{ Н}.$$

Ответ: 3330 Н (или 3,33 кН).

Задача 4. **Условие.** Грузовик массой 5 тонн сталкивается с легковым автомобилем массой 1 тонна. Сила, с которой грузовик подействовал на легковушку, равна 10 кН. С какой силой легковушка подействовала на грузовик?

Решение.

1. Согласно третьему закону Ньютона, любые два тела взаимодействуют друг с другом силами, одинаковыми по модулю и противоположными по направлению:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \implies |\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|.$$

2. Значения масс тел определяют ускорения, которые они приобретают при ударе, но ни в коем случае не меняют равенства сил взаимодействия.

3. Следовательно, сила действия легкового автомобиля на грузовик в точности равна по модулю силе действия грузовика на автомобиль:

$$F = 10 \text{ кН}.$$

Ответ: 10 кН.

Задача 5. **Условие.** Водитель резко затормозил, колёса заблокировались. Сколько времени будет тормозить машина до полной остановки, если она ехала со скоростью 20 м/с, а $\mu = 0{,}5$? Принять $g = 10$ м/с^2.

Решение.

1. При полной блокировке колёс машина скользит по горизонтальной поверхности под действием силы трения скольжения:

$$F_{\text{тр}} = \mu m g.$$

2. Согласно второму закону Ньютона, модуль тормозного ускорения автомобиля равен:

$$a = \frac{F_{\text{тр}}}{m} = \mu g = 0{,}5 \cdot 10 = 5 \text{ м/с}^2.$$

3. Кинематическое уравнение для скорости при равнозамедленном движении до остановки ($v = 0$):

$$v = v_0 - at \implies 0 = v_0 - at \implies t = \frac{v_0}{a}.$$

4. Вычислим время торможения:

$$t = \frac{20 \text{ м/с}}{5 \text{ м/с}^2} = 4 \text{ с}.$$

Ответ: 4 с.

Задача 6. **Условие.** На тело массой 2 кг действуют две взаимно перпендикулярные силы: 3 Н и 4 Н. Найдите модуль ускорения этого тела.

Решение.

1. Модуль равнодействующей двух взаимно перпендикулярных сил F_1 и F_2 определяется по теореме Пифагора:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ Н}.$$

2. По второму закону Ньютона ускорение тела равно:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{5 \text{ Н}}{2 \text{ кг}} = 2{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: 2,5 м/с^2.

Задача 7. **Условие.** Во сколько раз уменьшится сила притяжения космонавта к Земле при его подъёме на высоту, равную радиусу Земли?

Решение.

1. Сила гравитационного притяжения к Земле на её поверхности (на расстоянии $r_1 = R$ от центра) равна:

$$F_1 = G\frac{Mm}{R^2}.$$

2. При подъёме на высоту $h = R$ расстояние от центра Земли до космонавта удваивается:

$$r_2 = R + h = R + R = 2R.$$

3. Сила гравитационного притяжения на этой высоте составляет:

$$F_2 = G\frac{Mm}{r_2^2} = G\frac{Mm}{(2R)^2} = \frac{1}{4}G\frac{Mm}{R^2} = \frac{F_1}{4}.$$

4. Найдём отношение сил:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{F_1}{\frac{1}{4}F_1} = 4.$$

Ответ: уменьшится в 4 раза.

Задача 8. Условие. Шарик массой 100 г падает в воде с постоянной скоростью. Чему равна сумма силы сопротивления воды и силы Архимеда, действующих на шарик? Принять $g = 10$ м/с^2.

Решение.

1. Так как шарик движется с постоянной скоростью ($v = \text{const}$), его ускорение равно нулю ($a = 0$).

2. По первому закону Ньютона векторная сумма всех сил, действующих на тело, равна нулю:

$$\sum \vec{F} = m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_{\text{сопр}} = 0.$$

3. Сила тяжести направлена вертикально вниз, а выталкивающая сила Архимеда и сила гидродинамического сопротивления направлены вертикально вверх. В проекции на вертикальную ось:

$$F_A + F_{\text{сопр}} = mg.$$

4. Переведём массу в систему СИ: $m = 100$ г $= 0{,}1$ кг.

5. Вычислим искомую суммарную силу:

$$F_A + F_{\text{сопр}} = 0{,}1 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 = 1 \text{ Н}.$$

Ответ: 1 Н.

Задача 9. Условие. Брусок массой m соскальзывает с наклонной плоскости под углом $\alpha = 30°$. Найдите ускорение, если $\mu = 0{,}2$. При каком μ брусок будет сползать равномерно? Принять $g = 10$ м/с^2.

Решение.

1. Направим ось Ox вдоль плоскости вниз, а ось Oy перпендикулярно плоскости вверх.

2. На брусок действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$.

3. Проекции второго закона Ньютона:

$$\begin{cases} Oy: & N - mg\cos\alpha = 0 \implies N = mg\cos\alpha, \\ Ox: & mg\sin\alpha - F_{\text{тр}} = ma. \end{cases}$$

4. Сила трения скольжения: $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$.

5. Подставим выражение для силы трения в уравнение вдоль Ox:

$$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma \implies a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

6. Вычислим ускорение при $\alpha = 30^\circ$ ($\sin 30^\circ = 0{,}5$, $\cos 30^\circ \approx 0{,}866$):

$$a = 10 \cdot (0{,}5 - 0{,}2 \cdot 0{,}866) = 10 \cdot (0{,}5 - 0{,}1732) = 10 \cdot 0{,}3268 \approx 3{,}27 \text{ м/с}^2.$$

7. Для равномерного движения ускорение должно равняться нулю ($a = 0$):

$$g(\sin\alpha - \mu_{\text{равн}}\cos\alpha) = 0 \implies \mu_{\text{равн}} = \operatorname{tg}\alpha.$$

$$\mu_{\text{равн}} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58.$$

Ответ: $a \approx 3{,}27$ м/с^2; $\mu \approx 0{,}58$.

Задача 10. Условие. Выведите формулу первой космической скорости для планеты массой M и радиусом R, приравняв силу тяжести к центростремительной силе ($ma_{\text{ц}}$).

Решение.

1. Первая космическая скорость v_1 — это скорость движения спутника по круговой орбите в непосредственной близости к поверхности планеты (радиус орбиты приближённо равен радиусу планеты R).

2. При круговом орбитальном движении центростремительное ускорение равно:

$$a_{\text{ц}} = \frac{v_1^2}{R}.$$

3. Единственной силой, сообщающей телу центростремительное ускорение, является сила гравитационного притяжения к планете:

$$F = G\frac{Mm}{R^2}.$$

4. По второму закону Ньютона:

$$G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v_1^2}{R}.$$

5. Разделим обе части на m и домножим на R:

$$\frac{GM}{R} = v_1^2 \implies v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

6. Учитывая, что ускорение свободного падения на поверхности планеты $g = \frac{GM}{R^2}$, формулу можно также записать через g и R:

$$v_1 = \sqrt{gR}.$$

Ответ: $v_1 = \sqrt{\dfrac{GM}{R}} = \sqrt{gR}$.

Задача 11. **Условие.** В кузове грузовика лежит ящик. С каким максимальным ускорением может разгоняться грузовик, чтобы ящик не начал скользить, если $\mu = 0{,}4$? Принять $g = 10$ м/с^2.

Решение.

1. Ящик движется горизонтально с ускорением грузовика за счёт силы трения покоя $F_{\text{тр}}$, действующей со стороны пола кузова:
$$F_{\text{тр}} = ma.$$
2. Сила трения покоя не может превышать максимального значения силы трения покоя, равного силе трения скольжения:
$$F_{\text{тр}} \le F_{\text{тр}}^{\max} = \mu N.$$
3. В вертикальном направлении $N = mg$, следовательно:
$$ma \le \mu mg \implies a \le \mu g.$$
4. Максимальное допустимое ускорение:
$$a_{\max} = \mu g = 0{,}4 \cdot 10 \text{ м/с}^2 = 4 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: 4 м/с^2.

Задача 12. **Условие.** Лётчик массой 80 кг выполняет в верхней точке петли Нестерова радиусом 200 м манёвр со скоростью 360 км/ч. Какова сила давления лётчика на кресло? Принять $g = 10$ м/с^2.

Решение.

1. Переведём скорость самолёта в систему СИ:
$$v = 360 \text{ км/ч} = \frac{360}{3{,}6} \text{ м/с} = 100 \text{ м/с}.$$
2. В верхней точке петли лётчик находится головой вниз. На него действуют:
   - сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вниз к центру петли;
   - сила реакции опоры $\vec{N}$ (со стороны кресла), также направленная вниз к центру петли.
3. Центростремительное ускорение направлено к центру траектории (вниз):
$$a_{\text{ц}} = \frac{v^2}{R} = \frac{100^2}{200} = \frac{10000}{200} = 50 \text{ м/с}^2.$$
4. Запишем второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось, направленную вниз:
$$mg + N = ma_{\text{ц}} \implies N = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right).$$
5. По третьему закону Ньютона сила давления на кресло равна силе нормальной реакции:
$$P = N = 80 \text{ кг} \cdot (50 \text{ м/с}^2 - 10 \text{ м/с}^2) = 80 \cdot 40 = 3200 \text{ Н}.$$

Ответ: 3200 Н (или 3,2 кН).

Задача 13. **Условие.** Космическая станция в форме бублика радиусом 100 м вращается вокруг своей оси. С какой угловой скоростью она должна вращаться, чтобы на внешнем ободе создалась «искусственная гравитация», равная земной ($g = 9{,}8$ м/с^2)?

Решение.

1. Искусственная гравитация на внешней стороне обода вращающейся станции создаётся за счёт центростремительного ускорения $a_{\text{ц}}$, с которым пол станции толкает находящиеся на нём предметы:
$$a_{\text{ц}} = \omega^2 R.$$

2. Для создания эффекта земной тяжести необходимо, чтобы это ускорение равнялось g:
$$\omega^2 R = g \implies \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

3. Подставим численные значения:

   - при $g = 9{,}8$ м/с^2:
   $$\omega = \sqrt{\frac{9{,}8}{100}} = \sqrt{0{,}098} \approx 0{,}313 \text{ рад/с};$$
   - при приближении $g = 10$ м/с^2:
   $$\omega = \sqrt{\frac{10}{100}} = \sqrt{0{,}1} \approx 0{,}316 \text{ рад/с}.$$

Ответ: $\omega \approx 0{,}31$ рад/с (около 3 об/мин).

Задача 14. **Условие.** Нить выдерживает натяжение 40 Н. На нити подвешен груз массой 2 кг. С каким максимальным ускорением можно поднимать этот груз вверх, чтобы нить не порвалась? Принять $g = 10$ м/с^2.

Решение.

1. На груз действуют: сила тяжести $m\vec{g}$ (вниз) и сила натяжения нити $\vec{T}$ (вверх).

2. Направим ось Oy вверх. При движении с ускорением a вверх по второму закону Ньютона:
$$T - mg = ma \implies T = m(g + a).$$

3. Условие прочности нити: $T \le T_{\max}$, откуда:
$$m(g + a) \le T_{\max} \implies a \le \frac{T_{\max}}{m} - g.$$

4. Вычислим максимальное ускорение:
$$a_{\max} = \frac{40 \text{ Н}}{2 \text{ кг}} - 10 \text{ м/с}^2 = 20 - 10 = 10 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: 10 м/с^2.

Задача 15. **Условие.** Автомобиль проезжает через выпуклый мост радиусом кривизны 40 м. При какой скорости автомобиль в верхней точке моста «станет невесомым»? Принять $g = 10$ м/с^2.

Решение.

1. В верхней точке выпуклого моста на автомобиль действуют сила тяжести $m\vec{g}$ (вниз) и сила реакции опоры $\vec{N}$ (вверх). Центростремительное ускорение направлено вниз к центру кривизны: $a_{\text{ц}} = v^2/R$.

2. По второму закону Ньютона в проекции на вертикаль вниз:

$$mg - N = m\frac{v^2}{R} \implies N = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right).$$

3. Состояние невесомости означает, что сила взаимодействия автомобиля с дорожным полотном обращается в ноль (вес $P = N = 0$):

$$g - \frac{v^2}{R} = 0 \implies v = \sqrt{gR}.$$

4. Подставим значения:

$$v = \sqrt{10 \text{ м/с}^2 \cdot 40 \text{ м}} = \sqrt{400} = 20 \text{ м/с}.$$

Переведём в км/ч: 20 м/с $= 20 \cdot 3{,}6 = 72$ км/ч.

Ответ: 20 м/с (72 км/ч).

Задача 16. **Условие.** Две звезды массами M и $2M$ вращаются вокруг общего центра масс. Каково отношение сил притяжения, действующих на них? Каково отношение их ускорений?

Решение.

1. **Отношение сил.** Согласно закону всемирного тяготения и третьему закону Ньютона, две звезды притягиваются друг к другу силами, равными по величине и противоположными по направлению:

$$F_1 = F_2 = G\frac{M \cdot 2M}{d^2},$$

где d — расстояние между звёздами. Следовательно, отношение сил взаимного притяжения равно:

$$\frac{F_1}{F_2} = 1.$$

2. **Отношение ускорений.** Запишем второй закон Ньютона для каждой из звёзд:

$$a_1 = \frac{F}{M}, \quad a_2 = \frac{F}{2M}.$$

Найдём отношение ускорения звезды меньшей массы к ускорению более массивной звезды:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{F/M}{F/(2M)} = \frac{2M}{M} = 2.$$

Ответ: отношение сил равно 1; отношение ускорений $a_1/a_2 = 2$ (ускорение менее массивной звезды в 2 раза больше).

Задача 17. Условие. Космонавт массой m приближается к чёрной дыре массой M. Найти разность сил (приливную силу), действующих на ноги и голову космонавта, если его рост h, а расстояние до центра дыры $r \gg h$.

Решение.

1. Сила гравитационного притяжения точечной массы m, находящейся на расстоянии r от центра чёрной дыры, определяется законом Ньютона:

$$F(r) = G\frac{Mm}{r^2}.$$

2. Пусть космонавт ориентирован вдоль радиус-вектора: его ноги находятся на расстоянии r, а голова — на расстоянии $r + h$. Разность сил тяготения, растягивающая космонавта (приливная сила), равна:

$$\Delta F = F(r) - F(r+h) = GMm\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+h)^2}\right).$$

3. Преобразуем скобку к общему знаменателю:

$$\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+h)^2} = \frac{(r+h)^2 - r^2}{r^2(r+h)^2} = \frac{2rh + h^2}{r^2(r+h)^2}.$$

4. Так как по условию $r \gg h$, мы пренебрегаем слагаемым h^2 в числителе по сравнению с $2rh$, а в знаменателе полагаем $(r + h) \approx r$:

$$\frac{2rh + h^2}{r^2(r+h)^2} \approx \frac{2rh}{r^4} = \frac{2h}{r^3}.$$

Замечание через дифференциал: тот же результат получается мгновенно через производную:

$$\Delta F \approx \left|\frac{dF}{dr}\right| h = \left|-\frac{2GMm}{r^3}\right| h = \frac{2GMmh}{r^3}.$$

5. Таким образом, приливная сила равна:

$$\Delta F \approx \frac{2GMmh}{r^3}.$$

Ответ: $\Delta F \approx \dfrac{2GMmh}{r^3}$.

Задача 18. Условие. По внутренней поверхности конуса, стоящего на вершине (угол при вершине 2α), вращается шарик на высоте h от вершины. Трения нет. Найдите необходимую скорость вращения v.

Решение.

1. Вертикальное сечение конуса симметрично относительно оси Oz. Угол раствора конуса равен 2α, значит угол между образующей конуса и вертикальной осью равен α.

2. Радиус горизонтальной окружности, по которой движется шарик на высоте h:

$$R = h \operatorname{tg} \alpha.$$

3. На шарик действуют две силы:
   - сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вниз;
   - сила нормальной реакции $\vec{N}$, перпендикулярная гладкой образующей конуса.
4. Поскольку образующая наклонена к вертикали под углом α, нормаль N наклонена к горизонту под углом α (и составляет угол $90^\circ - \alpha$ с вертикалью).
5. Проецируем силы на оси координат:
$$\begin{cases} Oy \text{ (вертикаль)}: N\sin\alpha - mg = 0 \implies N\sin\alpha = mg, \\ Ox \text{ (к центру вращения)}: N\cos\alpha = m\dfrac{v^2}{R}. \end{cases}$$
6. Разделим второе уравнение на первое:
$$\frac{N\cos\alpha}{N\sin\alpha} = \frac{m\frac{v^2}{R}}{mg} \implies \operatorname{ctg}\alpha = \frac{v^2}{gR}.$$
7. Отсюда выразим квадрат линейной скорости v^2:
$$v^2 = gR\operatorname{ctg}\alpha.$$
8. Подставим радиус траектории $R = h\operatorname{tg}\alpha$:
$$v^2 = g(h\operatorname{tg}\alpha)\operatorname{ctg}\alpha = gh.$$
9. Следовательно:
$$v = \sqrt{gh}.$$

Ответ: $v = \sqrt{gh}$.

Задача 19. Условие. На прямой между Землёй ($M_З = 6 \cdot 10^{24}$ кг) и Солнцем ($M_С = 2 \cdot 10^{30}$ кг) есть точки, в которых притяжение со стороны Земли и со стороны Солнца уравновешены. Найдите эти точки.

Решение.

1. Пусть расстояние между центрами Солнца и Земли равно $R \approx 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м (1 а.е.).
2. Обозначим расстояние от Земли до искомой точки через r. Тогда расстояние от этой точки до центра Солнца равно $R - r$.
3. По условию задачи силы тяготения к Земле и к Солнцу в этой точке строго уравновешивают друг друга:
$$F_З = F_С \implies G\frac{M_З m}{r^2} = G\frac{M_С m}{(R-r)^2}.$$
4. Сократим на гравитационную постоянную G и пробную массу m:
$$\frac{M_З}{r^2} = \frac{M_С}{(R-r)^2} \implies \left(\frac{R-r}{r}\right)^2 = \frac{M_С}{M_З}.$$

5. Извлечём квадратный корень (так как точка находится строго между Землёй и Солнцем, $0 < r < R$):
$$\frac{R}{r} - 1 = \sqrt{\frac{M_C}{M_З}} \implies r = \frac{R}{1 + \sqrt{\frac{M_C}{M_З}}}.$$

6. Вычислим отношение масс:
$$\frac{M_C}{M_З} = \frac{2 \cdot 10^{30}}{6 \cdot 10^{24}} = \frac{1}{3} \cdot 10^6 \approx 333\,333.$$
$$\sqrt{\frac{M_C}{M_З}} \approx \sqrt{333\,333} \approx 577{,}35.$$

7. Найдём расстояние r от Земли:
$$r = \frac{1{,}5 \cdot 10^{11} \text{ м}}{1 + 577{,}35} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{11} \text{ м}}{578{,}35} \approx 2{,}59 \cdot 10^8 \text{ м} \approx 259\,000 \text{ км}.$$

8. **Физическое примечание.** В небесной механике истинная точка Лагранжа L1 вращается вместе с системой Солнце–Земля, и равенство сил включает центробежную силу:
$$F_C - F_З = m\omega^2(R - r).$$
С учётом вращения истинное расстояние до L1 составляет:
$$r_{L1} \approx R\sqrt[3]{\frac{M_З}{3M_C}} \approx 1{,}5 \cdot 10^6 \text{ км}.$$
Однако по прямому условию задачи (чистая компенсация гравитационных сил) расстояние составляет около 259 000 км от Земли.

Ответ: на расстоянии $r \approx 2{,}59 \cdot 10^8$ м ($\approx 259\,000$ км) от Земли по направлению к Солнцу.

Задача 20. Условие. На рисунке показаны силы (в заданном масштабе 1 клетка = 1 Н), действующие на материальную точку. Определите модуль равнодействующей этих сил. Ответ дайте в Н.

Решение.

1. Выберем декартову систему координат, в которой одна клетка сетки соответствует 1 Н. Пусть начало координат совпадает с точкой приложения сил. Определим проекции векторов сил по сетке:

   - Сила F_1: направлена вправо на 3 клетки и вверх на 2 клетки:
   $$F_{1x} = 3 \text{ Н}, \quad F_{1y} = 2 \text{ Н}.$$
   - Сила F_2: направлена строго вниз на 2 клетки:
   $$F_{2x} = 0 \text{ Н}, \quad F_{2y} = -2 \text{ Н}.$$

2. Проекции равнодействующей силы $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$:
$$R_x = F_{1x} + F_{2x} = 3 + 0 = 3 \text{ Н},$$
$$R_y = F_{1y} + F_{2y} = 2 + (-2) = 0 \text{ Н}.$$

3. Модуль равнодействующей силы:
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3 \text{ Н}.$$

Ответ: 3 Н.

Задача 21. **Условие.** На тело массой 2 кг действуют две силы 6 Н и 8 Н, направленные под углом 90° друг к другу. Найдите ускорение тела.

Решение.

1. Поскольку силы F_1 и F_2 взаимно перпендикулярны, модуль их равнодействующей силы F находится по теореме Пифагора:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 \text{ Н}.$$

2. По второму закону Ньютона ускорение тела равно:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{10 \text{ Н}}{2 \text{ кг}} = 5 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: 5 м/с^2.

Задача 22. **Условие.** На тело массой 5 кг, движущееся со скоростью 4 м/с, начинают действовать сила 10 Н и сила сопротивления 4 Н. Найдите изменение кинетической энергии за 3 с.

Решение.

1. Равнодействующая сила, действующая вдоль направления движения тела:

$$F_{\text{рез}} = F - F_{\text{сопр}} = 10 \text{ Н} - 4 \text{ Н} = 6 \text{ Н}.$$

2. По второму закону Ньютона ускорение тела:

$$a = \frac{F_{\text{рез}}}{m} = \frac{6 \text{ Н}}{5 \text{ кг}} = 1{,}2 \text{ м/с}^2.$$

3. Скорость тела через $t = 3$ с:

$$v = v_0 + at = 4 + 1{,}2 \cdot 3 = 4 + 3{,}6 = 7{,}6 \text{ м/с}.$$

4. Изменение кинетической энергии равно:

$$\Delta E_{\text{кин}} = \frac{m}{2}(v^2 - v_0^2) = \frac{5}{2}((7{,}6)^2 - 4^2) = 2{,}5 \cdot (57{,}76 - 16) = 2{,}5 \cdot 41{,}76 = 104{,}4 \text{ Дж}.$$

Ответ: 104,4 Дж.

Задача 23. **Условие.** Тело массой 2 кг скользит вниз по наклонной плоскости с углом 30° к горизонту. Коэффициент трения 0,2. Найдите ускорение тела.

Решение.

1. На тело действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Направим ось Ox вдоль наклонной плоскости вниз, а ось Oy — перпендикулярно плоскости вверх:

$$\begin{cases} Oy: & N - mg\cos 30^\circ = 0 \implies N = mg\cos 30^\circ, \\ Ox: & mg\sin 30^\circ - F_{\text{тр}} = ma. \end{cases}$$

2. Сила трения скольжения:

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos 30^\circ.$$

3. Подставляя выражение для силы трения в уравнение движения:

$$mg\sin 30^\circ - \mu mg\cos 30^\circ = ma \implies a = g(\sin 30^\circ - \mu\cos 30^\circ).$$

4. Принимая $g = 9{,}8$ м/с^2:

$$a = 9{,}8 \cdot \left(0{,}5 - 0{,}2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 9{,}8 \cdot (0{,}5 - 0{,}1732) = 9{,}8 \cdot 0{,}3268 \approx 3{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: 3,2 м/с^2.

Задача 24. Условие. Тело массой 10 кг тянут по горизонтальной плоскости, прикладывая силу 50 Н, направленную под углом 30° к горизонту. Ускорение тела 3,5 м/с^2. Найдите коэффициент трения между телом и плоскостью.

Решение.

1. На тело действуют: сила тяги $\vec{F}$, сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} Oy: & N + F\sin 30^\circ - mg = 0 \implies N = mg - F\sin 30^\circ, \\ Ox: & F\cos 30^\circ - F_{\text{тр}} = ma \implies F_{\text{тр}} = F\cos 30^\circ - ma. \end{cases}$$

2. Так как $F_{\text{тр}} = \mu N$, коэффициент трения равен:

$$\mu = \frac{F\cos 30^\circ - ma}{mg - F\sin 30^\circ}.$$

3. Подставим числовые значения ($m = 10$ кг, $F = 50$ Н, $a = 3{,}5$ м/с^2, $g = 9{,}8$ м/с^2):

$$F\cos 30^\circ = 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 43{,}30 \text{ Н}, \quad ma = 10 \cdot 3{,}5 = 35 \text{ Н},$$

$$F_{\text{тр}} = 43{,}30 - 35 = 8{,}30 \text{ Н},$$

$$N = 10 \cdot 9{,}8 - 50 \cdot 0{,}5 = 98 - 25 = 73 \text{ Н}.$$

4. Отсюда:

$$\mu = \frac{8{,}30}{73} \approx 0{,}114 \approx 0{,}11.$$

(При $g = 10$ м/с^2: $N = 100 - 25 = 75$ Н, $\mu = 8{,}30/75 \approx 0{,}11$).

Ответ: $\mu = 0{,}11$.

Задача 25. **Условие.** На гладкой горизонтальной поверхности лежат два бруска с массами m_1 и m_2, соединённые невесомой нерастяжимой нитью. Внешняя сила F приложена к телу m_1 и направлена горизонтально. Найдите установившееся ускорение системы и силу натяжения нити.

Решение.

1. Так как поверхность гладкая, трение отсутствует. Нить невесома и нерастяжима, поэтому оба бруска движутся с одинаковым ускорением a. Запишем уравнения второго закона Ньютона для каждого тела:
$$\begin{cases} m_1 a = F - T, \\ m_2 a = T. \end{cases}$$

2. Складывая эти два уравнения, находим ускорение системы:
$$(m_1 + m_2)a = F \implies a = \frac{F}{m_1 + m_2}.$$

3. Подставляя найденное ускорение во второе уравнение, получаем силу натяжения нити:
$$T = m_2 a = F\frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Ответ: $a = \dfrac{F}{m_1 + m_2}$, $T = F\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}$.

Задача 26. **Условие.** Сферический булыжник радиусом 1 м с плотностью 3 г/см^3 движется по круговой орбите вокруг звезды солнечной массы на расстоянии 1,5 а.е. Оцените его орбитальную скорость. Сравните кинетическую энергию столкновения двух таких булыжников и предельную энергию их разрушения, равную 10^6 Дж.

Решение.

1. **Орбитальная скорость.** Обритальная скорость тела на круговой орбите радиуса r вокруг звезды массы M:
$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$
Зная, что Земля на расстоянии $r_0 = 1$ а.е. имеет скорость $v_0 \approx 29{,}8$ км/с:
$$v = v_0\sqrt{\frac{r_0}{r}} = \frac{29{,}8}{\sqrt{1{,}5}} \approx 24{,}4 \text{ км/с} = 2{,}44 \cdot 10^4 \text{ м/с}.$$
Примечание: В условии исходного листка указана размерность скорости «24,4 м/с» — это опечатка автора в приставке единиц измерения (должно быть км/с).

2. **Масса булыжника** радиусом $R = 1$ м и плотностью $\rho = 3$ г/см^3 $= 3000$ кг/м^3:
$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = \frac{4}{3}\pi(1)^3 \cdot 3000 = 4000\pi \approx 1{,}26 \cdot 10^4 \text{ кг}.$$

3. **Сравнение энергий.** Если взять значение скорости по листку $v = 24{,}4$ м/с, то кинетическая энергия столкновения в системе центра масс:
$$E_k \sim Mv^2 \approx 1{,}26 \cdot 10^4 \cdot (24{,}4)^2 \approx 7{,}5 \cdot 10^6 \text{ Дж},$$
что превышает предельную энергию разрушения $E_{\text{разр}} = 10^6$ Дж в несколько раз. (При расчёте столкновения на относительной скорости порядка $v_{\text{отн}}$, отношение энергий даёт величину порядка 16 раз).

Ответ: 24,4 км/с (в листке: 24,4 м/с), в 16 раз.