Законы сохранения импульса и энергии

Преподаватель: Сорокина Василиса Ивановна

Задачи

Задача 1. Легковой автомобиль массой 1200 кг движется со скоростью 20 м/с. Какова его кинетическая энергия? Какой должна быть скорость грузовика массой 4800 кг, чтобы его кинетическая энергия была такой же?

Задача 2. Фигурист массой 70 кг, стоя на гладком льду, бросает горизонтально камень массой 5 кг со скоростью 14 м/с. С какой скоростью покатится назад фигурист?

Задача 3. Строитель роняет кирпич массой 2 кг с крыши дома высотой 10 м. Сопротивлением воздуха пренебречь. Какова кинетическая энергия кирпича в момент удара о землю? С какой скоростью он упадёт? (Принять $g = 10$ м/с^2).

Задача 4. Метеорит массой m попадает в небольшую покоящуюся планету массой $1000m$ и застревает в ней. До столкновения скорость метеорита была равна $v = 10\,010$ км/ч. Найдите скорость, которую приобрела планета после удара.

Задача 5. Игрушечный пистолет стреляет шариком массой 10 г. Спиральная пружина жёсткостью 400 Н/м перед выстрелом была сжата на 5 см. Найдите максимальную скорость вылета шарика, если КПД пистолета 100%.

Задача 6. Мальчик массой 40 кг прыгает с неподвижной лодки массой 60 кг на берег со скоростью 3 м/с. Какую скорость приобретёт лодка? Куда она будет направлена?

Задача 7. Ястреб массой 1,5 кг летит горизонтально со скоростью 20 м/с и на лету хватает птицу массой 0,5 кг, которая летела ему навстречу со скоростью 10 м/с. С какой скоростью они продолжат полёт сразу после этого?

Задача 8. Вагонетка американских горок массой 500 кг соскальзывает без начальной скорости с вершины холма высотой 20 м над уровнем земли. Пренебрегая трением, найдите её скорость на высоте 15 метров. (Принять $g = 10$ м/с^2).

Задача 9. Два пластилиновых шарика (массы 200 г и 300 г) катятся навстречу друг другу со скоростями 2 м/с и 1 м/с соответственно. Найдите модуль и направление их скорости после неупругого столкновения.

Задача 10. Спортивный автомобиль разгоняется с места до 30 м/с за 5 секунд. Масса авто 1000 кг. Какую полезную работу совершил двигатель автомобиля за это время?

Задача 11. Пуля массой 10 г, летящая горизонтально со скоростью 500 м/с, попадает в деревянный брусок массой 990 г, висящий на лёгкой нити длиной 1 м, и застревает в нём. На какой максимальный угол отклонится нить? (Принять $g = 10$ м/с^2).

Задача 12. Космический корабль летит вдали от планет со скоростью $v_0 = 100$ м/с. Система разделения срабатывает, и корабль распадается на две ступени массами $m_1 = 3000$ кг и $m_2 = 1000$ кг. Вторая (меньшая) ступень после разделения останавливается относительно звёзд. Какова скорость первой ступени?

Задача 13. Лыжник массой 80 кг спускается с горы высотой 20 м. У подножия горы его скорость составила 15 м/с. Найдите работу силы трения во время спуска. ($g = 10$ м/с^2).

Задача 14. Пушка на платформе суммарной массой $M = 10$ тонн, стоящей на гладких рельсах, стреляет снарядом массой $m = 20$ кг под углом 60° к горизонту. Скорость снаряда при вылете 500 м/с. С какой скоростью откатится платформа?

Задача 15. Снаряд летел горизонтально со скоростью 60 м/с и разорвался на два осколка массами 1 кг и 2 кг. Меньший осколок полетел вертикально вверх со скоростью 80 м/с. Найдите модуль скорости большего осколка.

Задача 16. Вагон массой 10 тонн, движущийся со скоростью 2 м/с, наталкивается на пружинный буфер тупика. Жёсткость пружины буфера 40 кН/м. На какое расстояние сожмётся пружина до остановки вагона?

Задача 17. Человек массой $m = 60$ кг стоит на тележке массой $M = 30$ кг, которая может катиться без трения. Человек начинает идти по тележке со скоростью $u = 1$ м/с относительно тележки. Найдите скорость тележки относительно земли.

Задача 18. Шарик массой $m = 0{,}2$ кг, движущийся со скоростью $v_0 = 5$ м/с, налетает на неподвижную пружину жёсткости $k = 200$ Н/м, закреплённую у стены. Найдите максимальное сжатие пружины.

Задача 19. Два конькобежца массами 50 кг и 70 кг стоят неподвижно на льду и отталкиваются друг от друга. После толчка первый получил скорость 2,8 м/с. Найдите скорость второго и работу, совершённую при толчке.

Задача 20. Космический зонд массой m летит навстречу планете массой M ($M \gg m$). Скорость планеты V, скорость зонда $-v_0$ (навстречу планете). Зонд делает петлю вокруг планеты и улетает в обратном направлении. Считая взаимодействие аналогом абсолютно упругого удара малого шарика об огромную стенку, найдите скорость зонда после маневра.

Задача 21. В невесомости находятся две сферические капли воды радиусом r_0 каждая. Из-за слабого притяжения они медленно сближаются и сливаются в одну каплю. Какое количество теплоты выделится при этом процессе? Коэффициент поверхностного натяжения воды σ. Формула энергии поверхности: $W = \sigma S$.

Задача 22. Неподвижный снаряд разрывается на три одинаковых осколка. Два из них разлетаются со скоростями v под прямым углом друг к другу. Найдите модуль и направление скорости третьего осколка.

Задача 23. На гладкой прямой лежат вплотную три одинаковых бруска массой m. В первый влетает четвёртый такой же брусок со скоростью v_0. Все столкновения абсолютно неупругие. Найдите скорость всей слипшейся системы после завершения всех столкновений и потери механической энергии.

Задача 24. Пуля массой m летит со скоростью v_0, пробивает подвешенный брусок массой M и вылетает со скоростью v. После этого брусок поднимается на высоту h. Выразите скорость вылета пули v через m, M, v_0, h, g.

Задача 25. Представим Вселенную как однородный шар плотностью ρ и радиусом R. На поверхности шара находится галактика массой m, которая удаляется со скоростью Хаббла $v = H \cdot R$, где H — постоянная Хаббла. При какой критической плотности ρ_{cr} кинетическая энергия галактики будет в точности равна её потенциальной энергии притяжения к шару?

Решения

Задача 1. Условие. Легковой автомобиль массой 1200 кг движется со скоростью 20 м/с. Какова его кинетическая энергия? Какой должна быть скорость грузовика массой 4800 кг, чтобы его кинетическая энергия была такой же?

Решение.

1. Кинетическая энергия легкового автомобиля:

$$E_{k1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{1200\ \text{кг} \cdot (20\ \text{м/с})^2}{2} = \frac{1200 \cdot 400}{2} = 240\,000\ \text{Дж} = 240\ \text{кДж}.$$

2. По условию кинетическая энергия грузовика равна энергии легкового автомобиля: $E_{k2} = E_{k1}$. Тогда

$$\frac{m_2 v_2^2}{2} = E_{k1} \implies v_2 = \sqrt{\frac{2E_{k1}}{m_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 240\,000}{4800}} = \sqrt{100} = 10\ \text{м/с}.$$

Ответ: 240 кДж; 10 м/с.

Задача 2. Условие. Фигурист массой 70 кг, стоя на гладком льду, бросает горизонтально камень массой 5 кг со скоростью 14 м/с. С какой скоростью покатится назад фигурист?

Решение. Система «фигурист + камень» замкнута вдоль горизонтальной оси. До броска тела покоились ($p_0 = 0$). Выберем ось Ox вдоль направления броска камня:

$$0 = m_k v_k - M_\text{ф} u_\text{ф} \implies u_\text{ф} = \frac{m_k v_k}{M_\text{ф}}.$$

Подставляем числовые значения:

$$u_\text{ф} = \frac{5\ \text{кг} \cdot 14\ \text{м/с}}{70\ \text{кг}} = \frac{70}{70} = 1\ \text{м/с}.$$

Ответ: 1 м/с.

Задача 3. **Условие.** Строитель роняет кирпич массой 2 кг с крыши дома высотой 10 м. Сопротивлением воздуха пренебречь. Какова кинетическая энергия кирпича в момент удара о землю? С какой скоростью он упадёт? (Принять $g = 10$ м/с^2).

Решение.

1. По закону сохранения механической энергии потенциальная энергия кирпича на крыше полностью переходит в кинетическую энергию в момент удара о поверхность земли:
$$E_k = E_p = mgh = 2 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 10 \text{ м} = 200 \text{ Дж}.$$

2. Скорость кирпича перед ударом:
$$E_k = \frac{mv^2}{2} \implies v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 10} = \sqrt{200} \approx 14{,}14 \text{ м/с}.$$
(Если использовать точное значение $g = 9{,}8$ м/с^2: $E_k = 196$ Дж, $v = 14$ м/с).

Ответ: 200 Дж; $\approx 14{,}14$ м/с (или 196 Дж; 14 м/с при $g = 9{,}8$ м/с^2).

Задача 4. **Условие.** Метеорит массой m попадает в небольшую покоящуюся планету массой $1000m$ и застревает в ней. До столкновения скорость метеорита была равна $v = 10\,010$ км/ч. Найдите скорость, которую приобрела планета после удара.

Решение. Удар абсолютно неупругий. Внешние силы отсутствуют, применим закон сохранения импульса:
$$mv = (m + 1000m)u \implies mv = 1001m \cdot u \implies u = \frac{v}{1001}.$$
Вычислим скорость:
$$u = \frac{10\,010 \text{ км/ч}}{1001} = 10 \text{ км/ч} \approx 2{,}78 \text{ м/с}.$$
Ответ: 10 км/ч ($\approx 2{,}78$ м/с).

Задача 5. **Условие.** Игрушечный пистолет стреляет шариком массой 10 г. Спиральная пружина жёсткостью 400 Н/м перед выстрелом была сжата на 5 см. Найдите максимальную скорость вылета шарика, если КПД пистолета 100%.

Решение. Переведём величины в систему СИ: $m = 10$ г $= 0{,}01$ кг, $x = 5$ см $= 0{,}05$ м, $k = 400$ Н/м.

По закону сохранения энергии потенциальная энергия деформированной пружины полностью переходит в кинетическую энергию шарика:
$$\frac{kx^2}{2} = \frac{mv_{\max}^2}{2} \implies v_{\max} = x\sqrt{\frac{k}{m}}.$$
Подставим данные:
$$v_{\max} = 0{,}05 \cdot \sqrt{\frac{400}{0{,}01}} = 0{,}05 \cdot \sqrt{40\,000} = 0{,}05 \cdot 200 = 10 \text{ м/с}.$$
Ответ: 10 м/с.

Задача 6. **Условие.** Мальчик массой 40 кг прыгает с неподвижной лодки массой 60 кг на берег со скоростью 3 м/с. Какую скорость приобретёт лодка? Куда она будет направлена?

Решение. Система «мальчик + лодка» покоилась: $p_0 = 0$. При прыжке мальчика в сторону берега (ось Ox), по закону сохранения импульса в проекции на эту ось:

$$0 = m_{\text{м}} v_{\text{м}} - M_{\text{л}} u_{\text{л}} \implies u_{\text{л}} = \frac{m_{\text{м}} v_{\text{м}}}{M_{\text{л}}}.$$

Подставим числовые значения:

$$u_{\text{л}} = \frac{40 \text{ кг} \cdot 3 \text{ м/с}}{60 \text{ кг}} = \frac{120}{60} = 2 \text{ м/с}.$$

Вектор скорости лодки направлен противоположно скорости мальчика, то есть от берега.

Ответ: 2 м/с; от берега (противоположно направлению прыжка).

Задача 7. **Условие.** Ястреб массой 1,5 кг летит горизонтально со скоростью 20 м/с и на лету хватает птицу массой 0,5 кг, которая летела ему навстречу со скоростью 10 м/с. С какой скоростью они продолжат полёт сразу после этого?

Решение. Процесс является абсолютно неупругим столкновением. Направим ось Ox по направлению движения ястреба. Запишем закон сохранения импульса в проекции на ось Ox:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u \implies u = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Подставим численные значения:

$$u = \frac{1{,}5 \cdot 20 - 0{,}5 \cdot 10}{1{,}5 + 0{,}5} = \frac{30 - 5}{2{,}0} = \frac{25}{2} = 12{,}5 \text{ м/с}.$$

Так как $u > 0$, движение продолжится в направлении первоначального полёта ястреба.

Ответ: 12,5 м/с.

Задача 8. **Условие.** Вагонетка американских горок массой 500 кг соскальзывает без начальной скорости с вершины холма высотой 20 м над уровнем земли. Пренебрегая трением, найдите её скорость на высоте 15 метров. (Принять $g = 10$ м/с^2).

Решение. По закону сохранения механической энергии:

$$E_1 = E_2 \implies mgh_1 = mgh_2 + \frac{mv^2}{2}.$$

Разделим обе части равенства на массу m:

$$g(h_1 - h_2) = \frac{v^2}{2} \implies v = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}.$$

Подставим значения высот:

$$v = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot (20 - 15)} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 5} = \sqrt{100} = 10 \text{ м/с}.$$

Ответ: 10 м/с.

Задача 9. **Условие.** Два пластилиновых шарика (массы 200 г и 300 г) катятся навстречу друг другу со скоростями 2 м/с и 1 м/с соответственно. Найдите модуль и направление их скорости после неупругого столкновения.

Решение. Переведём массы в килограммы: $m_1 = 0{,}2$ кг, $m_2 = 0{,}3$ кг. Скорости тел: $v_1 = 2$ м/с, $v_2 = 1$ м/с.

Направим координатную ось Ox вдоль вектора скорости первого шарика. Закон сохранения импульса:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u_x \implies u_x = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Вычислим проекцию:

$$u_x = \frac{0{,}2 \cdot 2 - 0{,}3 \cdot 1}{0{,}2 + 0{,}3} = \frac{0{,}4 - 0{,}3}{0{,}5} = \frac{0{,}1}{0{,}5} = 0{,}2 \text{ м/с}.$$

Так как $u_x > 0$, результирующий вектор направлен вдоль движения первого шарика (200 г).

Ответ: модуль скорости 0,2 м/с; направление совпадает с направлением начального движения шарика массой 200 г.

Задача 10. **Условие.** Спортивный автомобиль разгоняется с места до 30 м/с за 5 секунд. Масса авто 1000 кг. Какую полезную работу совершил двигатель автомобиля за это время?

Решение. По теореме об изменении кинетической энергии полезная работа двигателя A, затраченная на разгон, равна изменению кинетической энергии автомобиля:

$$A = \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = \frac{mv^2}{2} - 0 = \frac{1000 \text{ кг} \cdot (30 \text{ м/с})^2}{2} = \frac{1000 \cdot 900}{2} = 450\,000 \text{ Дж} = 450 \text{ кДж}.$$

(Время разгона 5 с является избыточным условием, оно потребовалось бы только для вычисления полезной мощности $N = A/t = 90$ кВт).

Ответ: 450 кДж.

Задача 11. **Условие.** Пуля массой 10 г, летящая горизонтально со скоростью 500 м/с, попадает в деревянный брусок массой 990 г, висящий на лёгкой нити длиной 1 м, и застревает в нём. На какой максимальный угол отклонится нить? (Принять $g = 10$ м/с^2).

Решение.

1. **Столкновение пули и бруска.** Процесс неупругий, длится крайне малое время, нить остаётся вертикальной. По ЗСИ:

   $$mv = (m + M)u \implies u = \frac{mv}{m + M}.$$

   Подставим массы ($m = 0{,}01$ кг, $M = 0{,}99$ кг $\Rightarrow m + M = 1{,}0$ кг):

   $$u = \frac{0{,}01 \cdot 500}{1{,}0} = 5 \text{ м/с}.$$

2. **Подъём маятника.** По ЗСЭ кинетическая энергия системы расходуется на набор потенциальной энергии:

   $$\frac{(m + M)u^2}{2} = (m + M)gh \implies h = \frac{u^2}{2g} = \frac{5^2}{2 \cdot 10} = \frac{25}{20} = 1{,}25 \text{ м}.$$

3. **Анализ движения на нити.** Поскольку высота подъёма $h = 1{,}25$ м превышает длину нити $L = 1$ м ($h > L$, но $h < 2L$), тело поднимается выше точки подвеса. При движении по окружности на лёгкой нерастяжимой нити натяжение T определяется вторым законом Ньютона в проекции на радиальную ось:

$$T = (m + M)\left(\frac{v^2(\theta)}{L} - g\cos\theta\right),$$

где θ — угол отклонения от нижней точки. По закону сохранения энергии: $v^2(\theta) = u^2 - 2gL(1 - \cos\theta)$. Тогда сила натяжения:

$$T = \frac{m + M}{L}\left(u^2 - 2gL + 3gL\cos\theta\right).$$

Нить теряет натяжение ($T = 0$), когда:

$$\cos\theta_0 = \frac{2gL - u^2}{3gL} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 1 - 25}{3 \cdot 10 \cdot 1} = \frac{-5}{30} = -\frac{1}{6}.$$

При угле $\theta_0 = \arccos(-1/6) \approx 99{,}59^\circ$ нить провисает, и далее тело свободно летит по параболе. В наивысшей точке параболической траектории вертикальная компонента скорости обращается в ноль, а максимальная высота подъёма над точкой подвеса составит $y_{\max} = \frac{L}{6} + \frac{5 \cdot (35/36)}{20} \approx 0{,}41$ м.

В базовой школьной трактовке, если жёсткий стержень заменяет нить или угол считается по формуле $h = L(1 - \cos\alpha)$:

$$1 - \cos\alpha = 1{,}25 \implies \cos\alpha = -0{,}25 \implies \alpha \approx 104{,}5^\circ.$$

С физической точки зрения для нити отрыв происходит при $\theta_0 = \arccos(-1/6) \approx 99{,}6^\circ$.

Ответ: нить натянута до угла $\theta_0 = \arccos(-1/6) \approx 99{,}6^\circ$, после чего провисает (для жёсткого невесомого стержня $\alpha = \arccos(-0{,}25) \approx 104{,}5^\circ$).

Задача 12. Условие. Космический корабль летит вдали от планет со скоростью $v_0 = 100$ м/с. Система разделения срабатывает, и корабль распадается на две ступени массами $m_1 = 3000$ кг и $m_2 = 1000$ кг. Вторая (меньшая) ступень после разделения останавливается относительно звёзд. Какова скорость первой ступени?

Решение. Система замкнута, внешние силы пренебрежимо малы. Направим ось Ox по направлению начального движения корабля. По ЗСИ:

$$(m_1 + m_2)v_0 = m_1u_1 + m_2u_2.$$

По условию вторая ступень остановилась относительно звёзд: $u_2 = 0$. Тогда:

$$(m_1 + m_2)v_0 = m_1u_1 \implies u_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1}v_0.$$

Подставим массы:

$$u_1 = \frac{3000 + 1000}{3000} \cdot 100 = \frac{4000}{3000} \cdot 100 = \frac{4}{3} \cdot 100 = \frac{400}{3} \text{ м/с} \approx 133{,}33 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\frac{400}{3}$ м/с $\approx 133{,}33$ м/с.

Задача 13. **Условие.** Лыжник массой 80 кг спускается с горы высотой 20 м. У подножия горы его скорость составила 15 м/с. Найдите работу силы трения во время спуска. ($g = 10$ м/с^2).

Решение. По теореме об изменении полной механической энергии:

$$A_{\text{тр}} = E_2 - E_1,$$

где:

- $E_1 = mgh$ — начальная механическая энергия на вершине горы;
- $E_2 = \dfrac{mv^2}{2}$ — конечная механическая энергия у подножия горы.

Рассчитаем значения:

$$E_1 = 80 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 20 \text{ м} = 16\,000 \text{ Дж} = 16 \text{ кДж},$$

$$E_2 = \frac{80 \text{ кг} \cdot (15 \text{ м/с})^2}{2} = 40 \cdot 225 = 9000 \text{ Дж} = 9 \text{ кДж}.$$

Тогда работа силы трения:

$$A_{\text{тр}} = 9000 - 16\,000 = -7000 \text{ Дж} = -7 \text{ кДж}.$$

Ответ: -7 кДж (знак «минус» указывает, что сила трения совершает отрицательную работу, направленную против движения).

Задача 14. **Условие.** Пушка на платформе суммарной массой $M = 10$ тонн, стоящей на гладких рельсах, стреляет снарядом массой $m = 20$ кг под углом 60° к горизонту. Скорость снаряда при вылете 500 м/с. С какой скоростью откатится платформа?

Решение. Система «платформа + снаряд» замкнута вдоль горизонтального направления. До выстрела система покоилась. По ЗСИ в проекции на горизонтальную ось:

$$0 = mv\cos 60^\circ - Mu \implies u = \frac{mv\cos 60^\circ}{M}.$$

Переведём массу платформы в килограммы: $M = 10$ т $= 10\,000$ кг. Подставим значения:

$$u = \frac{20 \text{ кг} \cdot 500 \text{ м/с} \cdot 0{,}5}{10\,000 \text{ кг}} = \frac{5000}{10\,000} = 0{,}5 \text{ м/с}.$$

Ответ: 0,5 м/с.

Задача 15. **Условие.** Снаряд летел горизонтально со скоростью 60 м/с и разорвался на два осколка массами 1 кг и 2 кг. Меньший осколок полетел вертикально вверх со скоростью 80 м/с. Найдите модуль скорости большего осколка.

Решение. Пусть $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг. Полная масса снаряда $M = m_1 + m_2 = 3$ кг. Начальный импульс направлен горизонтально (вдоль оси Ox):

$$\vec{p_0} = (Mv_0, 0) = (3 \cdot 60, 0) = (180, 0) \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Меньший осколок полетел вертикально вверх (вдоль оси Oy):

$$\vec{p_1} = (0, m_1 v_1) = (0, 1 \cdot 80) = (0, 80) \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

По закону сохранения импульса: $\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow \vec{p}_2 = \vec{p}_0 - \vec{p}_1$. В проекциях на оси координат:

$$p_{2x} = p_{0x} - p_{1x} = 180 - 0 = 180 \text{ кг} \cdot \text{м/с},$$

$$p_{2y} = p_{0y} - p_{1y} = 0 - 80 = -80 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Модуль импульса второго осколка:

$$p_2 = \sqrt{p_{2x}^2 + p_{2y}^2} = \sqrt{180^2 + (-80)^2} = \sqrt{32\,400 + 6400} = \sqrt{38\,800} = 20\sqrt{97} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Модуль скорости второго осколка:

$$v_2 = \frac{p_2}{m_2} = \frac{20\sqrt{97}}{2} = 10\sqrt{97} \approx 98{,}49 \text{ м/с}.$$

Ответ: $10\sqrt{97}$ м/с $\approx 98{,}49$ м/с.

Задача 16. Условие. Вагон массой 10 тонн, движущийся со скоростью 2 м/с, наталкивается на пружинный буфер тупика. Жёсткость пружины буфера 40 кН/м. На какое расстояние сожмётся пружина до остановки вагона?

Решение. Переведём величины в СИ: $M = 10$ т $= 10^4$ кг, $v = 2$ м/с, $k = 40$ кН/м $= 4 \cdot 10^4$ Н/м.

По закону сохранения механической энергии вся кинетическая энергия вагона перейдёт в потенциальную энергию упругой деформации пружины в момент её максимального сжатия x:

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{kx^2}{2} \implies x = v\sqrt{\frac{M}{k}}.$$

$$x = 2 \cdot \sqrt{\frac{10^4}{4 \cdot 10^4}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} = 2 \cdot 0{,}5 = 1 \text{ м}.$$

Ответ: 1 м.

Задача 17. Условие. Человек массой $m = 60$ кг стоит на тележке массой $M = 30$ кг, которая может катиться без трения. Человек начинает идти по тележке со скоростью $u = 1$ м/с относительно тележки. Найдите скорость тележки относительно земли.

Решение. Пусть вектор скорости тележки относительно земли равен $\vec{v}_t$. Человек идёт по тележке со скоростью $\vec{u}$ относительно неё. Тогда по классическому закону сложения скоростей скорость человека относительно земли:

$$\vec{v}_{\text{чел}} = \vec{v}_t + \vec{u}.$$

Направим ось Ox по ходу движения человека. Пусть тележка откатывается назад со скоростью v_t по модулю, тогда в проекциях: $v_{\text{чел},x} = u - v_t$, а скорость тележки $v_{t,x} = -v_t$. Так как до начала движения система покоилась, по ЗСИ:

$$0 = m(u - v_t) - Mv_t \implies mu = (m + M)v_t \implies v_t = \frac{mu}{m + M}.$$

Подставим данные:

$$v_t = \frac{60 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м/с}}{60 \text{ кг} + 30 \text{ кг}} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3} \text{ м/с} \approx 0{,}67 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$ м/с $\approx 0{,}67$ м/с (направлена противоположно движению человека).

Задача 18. **Условие.** Шарик массой $m = 0{,}2$ кг, движущийся со скоростью $v_0 = 5$ м/с, налетает на неподвижную пружину жёсткости $k = 200$ Н/м, закреплённую у стены. Найдите максимальное сжатие пружины.

Решение. В момент максимального сжатия пружины шарик мгновенно останавливается ($v = 0$). По закону сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kx_{\max}^2}{2} \implies x_{\max} = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Подставим численные значения:

$$x_{\max} = 5 \cdot \sqrt{\frac{0{,}2}{200}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{1}{1000}} = 5 \cdot \frac{1}{10\sqrt{10}} = \frac{1}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{20} \text{ м} \approx 0{,}158 \text{ м} = 15{,}8 \text{ см}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{20}$ м $\approx 0{,}158$ м (15,8 см).

Задача 19. **Условие.** Два конькобежца массами 50 кг и 70 кг стоят неподвижно на льду и отталкиваются друг от друга. После толчка первый получил скорость 2,8 м/с. Найдите скорость второго и работу, совершённую при толчке.

Решение.

1. Пусть $m_1 = 50$ кг, $m_2 = 70$ кг, $v_1 = 2{,}8$ м/с. По ЗСИ:

$$0 = m_1v_1 - m_2v_2 \implies v_2 = \frac{m_1v_1}{m_2} = \frac{50 \cdot 2{,}8}{70} = \frac{140}{70} = 2{,}0 \text{ м/с}.$$

2. Совершённая работа A равна приращению кинетической энергии системы (так как до толчка $E_{k0} = 0$):

$$A = E_{k1} + E_{k2} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}.$$

Подставим значения:

$$A = \frac{50 \cdot (2{,}8)^2}{2} + \frac{70 \cdot (2{,}0)^2}{2} = 25 \cdot 7{,}84 + 35 \cdot 4 = 196 + 140 = 336 \text{ Дж}.$$

Ответ: 2,0 м/с; 336 Дж.

Задача 20. **Условие.** Космический зонд массой m летит навстречу планете массой M ($M \gg m$). Скорость планеты V, скорость зонда $-v_0$ (навстречу планете). Зонд делает петлю вокруг планеты и улетает в обратном направлении. Считая взаимодействие аналогом абсолютно упругого удара малого шарика об огромную стенку, найдите скорость зонда после маневра.

Решение. Перейдём в систему отсчёта, связанную с планетой.

1. До сближения планета движется навстречу зонду со скоростью V, а зонд — со скоростью v_0. Относительная скорость сближения зонда с планетой:

$$u_{\text{отн}} = v_0 + V.$$

2. Так как гравитационное поле консервативно, а масса планеты бесконечно велика по сравнению с зондом ($M \gg m$), в СО планеты после совершения гравитационного разворота (петли) зонд удаляется от планеты с той же по модулю относительной скоростью:

$$u'_{\text{отн}} = u_{\text{отн}} = v_0 + V,$$

но теперь вектор скорости направлен в сторону движения планеты.

3. Перейдём обратно в исходную лабораторную (гелиоцентрическую) систему отсчёта. Скорость зонда равна векторной сумме скорости планеты и скорости зонда относительно планеты:
$$v_{\text{кон}} = V + u'_{\text{отн}} = V + (v_0 + V) = v_0 + 2V.$$

Ответ: $v_0 + 2V$.

Задача 21. **Условие.** В невесомости находятся две сферические капли воды радиусом r_0 каждая. Из-за слабого притяжения они медленно сближаются и сливаются в одну каплю. Какое количество теплоты выделится при этом процессе? Коэффициент поверхностного натяжения воды σ. Формула энергии поверхности: $W = \sigma S$.

Решение.

1. Из закона сохранения массы (и несжимаемости жидкости) суммарный объём капель сохраняется:
$$V_{\text{общ}} = 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\pi r_0^3\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 \implies R^3 = 2r_0^3 \implies R = r_0\sqrt[3]{2}.$$

2. Начальная площадь поверхности двух капель:
$$S_1 = 2 \cdot (4\pi r_0^2) = 8\pi r_0^2.$$
Конечная площадь поверхности образовавшейся капли:
$$S_2 = 4\pi R^2 = 4\pi(r_0 2^{1/3})^2 = 4\pi r_0^2 \cdot 2^{2/3}.$$

3. Начальная и конечная поверхностная энергия:
$$W_1 = \sigma S_1 = 8\pi\sigma r_0^2, \quad W_2 = \sigma S_2 = 4 \cdot 2^{2/3}\pi\sigma r_0^2.$$

4. Поскольку кинетическая энергия капель до слияния пренебрежимо мала, убыль поверхностной энергии переходит во внутреннюю энергию (выделяется в виде теплоты Q):
$$Q = W_1 - W_2 = 4\pi\sigma r_0^2(2 - 2^{2/3}) = 4\pi\sigma r_0^2(2 - \sqrt[3]{4}).$$
Численно: $2 - \sqrt[3]{4} \approx 2 - 1{,}5874 = 0{,}4126$, следовательно, $Q \approx 1{,}65\pi\sigma r_0^2$.

Ответ: $4\pi\sigma r_0^2(2 - \sqrt[3]{4}) \approx 1{,}65\pi\sigma r_0^2$.

Задача 22. **Условие.** Неподвижный снаряд разрывается на три одинаковых осколка. Два из них разлетаются со скоростями v под прямым углом друг к другу. Найдите модуль и направление скорости третьего осколка.

Решение. Пусть массы всех трёх осколков равны m. До разрыва снаряд покоился: $\vec{p}_0 = 0$. Направим оси координат Ox и Oy вдоль скоростей первых двух осколков. Тогда:
$$\vec{p}_1 = (mv, 0), \quad \vec{p}_2 = (0, mv).$$
По закону сохранения импульса:
$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0 \implies \vec{p}_3 = -(\vec{p}_1 + \vec{p}_2).$$
Отсюда проекции импульса третьего осколка:
$$p_{3x} = -mv, \quad p_{3y} = -mv.$$

Модуль импульса третьего осколка:

$$p_3 = \sqrt{p_{3x}^2 + p_{3y}^2} = \sqrt{(-mv)^2 + (-mv)^2} = mv\sqrt{2}.$$

Скорость третьего осколка:

$$v_3 = \frac{p_3}{m} = v\sqrt{2}.$$

Направление вектора скорости $\vec{v}_3$: вектор лежит в плоскости движения первых двух осколков и направлен противоположно вектору $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$, то есть под углом 135° к вектору скорости каждого из первых двух осколков.

Ответ: $v\sqrt{2}$; под углом 135° к направлению скорости каждого из первых двух осколков.

Задача 23. Условие. На гладкой прямой лежат вплотную три одинаковых бруска массой m. В первый влетает четвёртый такой же брусок со скоростью v_0. Все столкновения абсолютно неупругие. Найдите скорость всей слипшейся системы после завершения всех столкновений и потери механической энергии.

Решение.

1. Так как система из четырёх брусков замкнута вдоль горизонтальной линии движения, закон сохранения суммарного импульса выполняется независимо от того, происходят соударения поочерёдно или одновременно:

$$p_0 = p_{\text{кон}} \implies mv_0 = (m + m + m + m)u = 4mu \implies u = \frac{v_0}{4}.$$

2. Начальная механическая энергия системы:

$$E_1 = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Конечная механическая энергия системы:

$$E_2 = \frac{(4m)u^2}{2} = 2m\left(\frac{v_0}{4}\right)^2 = \frac{2mv_0^2}{16} = \frac{mv_0^2}{8}.$$

3. Потеря механической энергии ΔE (перешедшая в теплоту при неупругой деформации):

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_0^2}{8} = \frac{3}{8}mv_0^2.$$

Ответ: скорость $u = \dfrac{v_0}{4}$; потери механической энергии $\Delta E = \dfrac{3}{8}mv_0^2$.

Задача 24. Условие. Пуля массой m летит со скоростью v_0, пробивает подвешенный брусок массой M и вылетает со скоростью v. После этого брусок поднимается на высоту h. Выразите скорость вылета пули v через m, M, v_0, h, g.

Решение.

1. Пусть сразу после вылета пули брусок приобретает горизонтальную скорость u. По закону сохранения механической энергии при дальнейшем подъёме бруска:

$$\frac{Mu^2}{2} = Mgh \implies u = \sqrt{2gh}.$$

2. Пробивание бруска происходит за очень малое время, поэтому в горизонтальном направлении применим закон сохранения импульса:

$$mv_0 = mv + Mu.$$

3. Подставим выражение для скорости бруска u:

$$mv_0 = mv + M\sqrt{2gh} \implies mv = mv_0 - M\sqrt{2gh} \implies v = v_0 - \frac{M}{m}\sqrt{2gh}.$$

Ответ: $v = v_0 - \dfrac{M}{m}\sqrt{2gh}$.

Задача 25. Условие. Представим Вселенную как однородный шар плотностью ρ и радиусом R. На поверхности шара находится галактика массой m, которая удаляется со скоростью Хаббла $v = H \cdot R$, где H — постоянная Хаббла. При какой критической плотности ρ_{cr} кинетическая энергия галактики будет в точности равна её потенциальной энергии притяжения к шару?

Решение.

1. Масса шара радиусом R с однородной плотностью ρ_{cr} равна:

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{cr}.$$

2. По теореме Ньютона гравитационная сила притяжения галактики, находящейся на поверхности сферически-симметричного распределения массы, эквивалентна притяжению точечной массы M, помещённой в центре шара. Модуль потенциальной энергии взаимодействия галактики с этим шаром:

$$E_p = \frac{GMm}{R} = \frac{G \cdot \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{cr}\right) \cdot m}{R} = \frac{4}{3}\pi G \rho_{cr} m R^2.$$

3. Кинетическая энергия галактики:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(HR)^2}{2} = \frac{1}{2}mH^2R^2.$$

4. По условию задачи кинетическая энергия в точности равна потенциальной энергии притяжения ($E_k = E_p$):

$$\frac{1}{2}mH^2R^2 = \frac{4}{3}\pi G \rho_{cr} m R^2.$$

Сократим обе части равенства на ненулевой множитель mR^2:

$$\frac{1}{2}H^2 = \frac{4}{3}\pi G \rho_{cr} \implies \rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G}.$$

Ответ: $\rho_{cr} = \dfrac{3H^2}{8\pi G}$.