Задачи

Задача 1. В остроугольном треугольнике ABC окружность с диаметром BC пересекает высоту AD в точке M. Высоты треугольника пересекаются в точке H. Найдите AH, если $AD = 32$ и $DM = 8$.

Задача 2. Окружность радиуса 8 касается основания AC равнобедренного треугольника ABC и продолжений его боковых сторон. Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC, если $AC = 12$.

Задача 3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка O - середина диагонали BD. Длина диагонали AC равна 50. Расстояния от точки O до всех сторон четырехугольника равны 7. Найдите площадь четырехугольника.

Задача 4. В треугольника ABC биссектриса AP и медиана BM пересекаются в точке K. Отношение $AC : AB = 5 : 7$. Найдите отношение площадей $S_{KPCM} : S_{ABC}$.

Задача 5. В треугольнике ABC медиана AD и биссектриса BE перпендикулярны и равны 64. Найдите стороны треугольника.

Задача 6. Диагонали трапеции равны 15 и 7, средняя линия равна 10. Найдите площадь трапеции.

Задача 7. В треугольнике ABC сторона $AB = 16$, $\angle C = 105^\circ$, AK и BM - высоты, точка P - середина стороны AB. Найдите площадь треугольника MPK.

Задача 8. В параллелограмме $ABCD$ стороны $AB = 2\sqrt{5}$, $BC = 5\sqrt{2}$. M - середина стороны AD и отрезок BM перпендикулярен диагонали AC. Найдите длину диагонали BD.

Задача 9. В трапеции $ABCD$ основания $BC = 24$ и $AD = 32$, боковая сторона $AB = 7$, $\angle A + \angle D = 90^\circ$. Найдите радиус окружности, которая проходит через точки A и B и касается прямой CD.

Задача 10. Две окружности, радиусом 6 и 24, касаются друг друга внешним образом к точке K и касаются сторон угла с вершиной A. Общая касательная к окружностям в точке K пересекает стороны угла в точках B и C. Найдите радиус описанной окружности треугольника ABC.

Упражнения

Упражнение 1

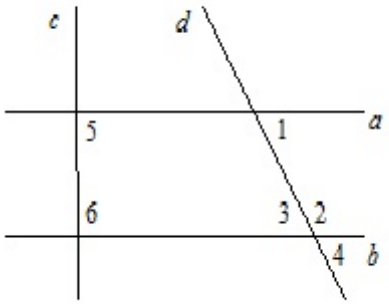
Параллельны ли прямые a и b см. рис, если

1. угол 1 равен углу 3;

2. угол 1 равен углу 4;

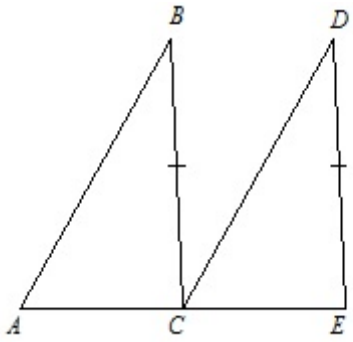
3. сумма углов 1 и 2 равна 180°;

4. сумма углов 5 и 6 равна 90°?



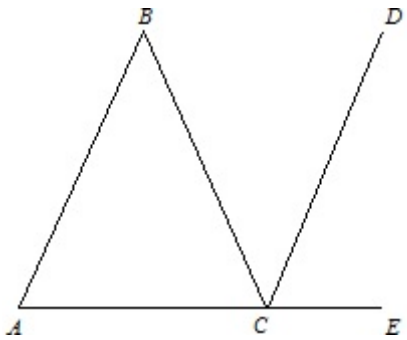
Упражнение 2

На рис $\triangle ABC = \triangle CDE, BC = DE$. Докажите, что $AB \| CD$.



Упражнение 3

На рисунке $AB = BC$, угол $\angle A$ равен 60°, CD - биссектриса угла $\angle BCE$. Докажите, что $AB \| CD$.



Упражнение 4

На рисунке $AB = CD$ и $BC = AD$. Докажите, что $BC||AD$.

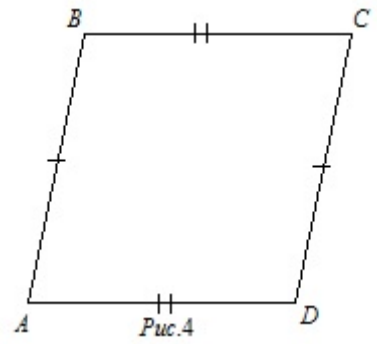
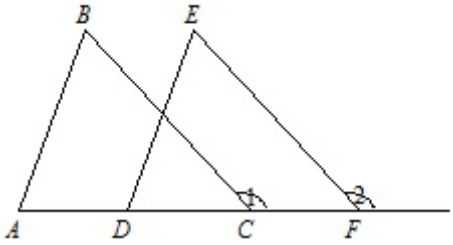


Рис.4

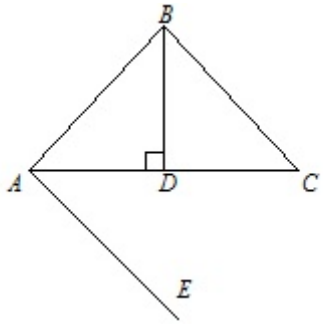
Упражнение 5

На рисунке угол 1 равен углу 2, $BC = EF$, $AD = CF$. Докажите, что $AB||DE$.



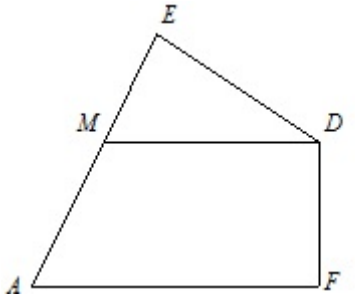
Упражнение 6

На рисунке углы $\angle ABD$ и $\angle DBC$ равны, $BD \perp AC$, AC - биссектриса угла $\angle BAE$. Докажите, что $BC||AE$.



Упражнение 7

На рисунке $AM = MD, DE = DF$ и $AE = AF$. Докажите, что $MD||AF$.



Упражнение 8

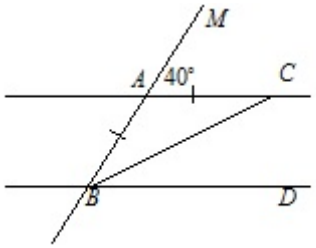
Один из внутренних односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей, в 3 раза больше другого. Чему равны эти углы?

Упражнение 9

Дан прямоугольный треугольник $\triangle ACB$ (угол $\angle C$ - прямой), E лежит на AC, F лежит на AB, причем $EF||CB$, EK - биссектриса треугольника $\triangle AEF$. Чему равен угол $\angle AEK$

Упражнение 10

На рисунке $AC||BD$ и $AC = AB$, угол $\angle MAC$ равен 40°. Найдите угол $\angle CBD$.

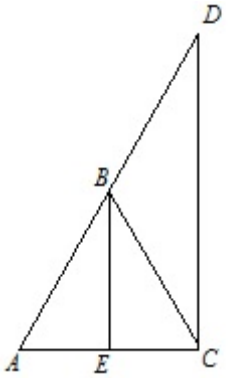


Упражнение 11

Отрезки CD и AB пересекаются в точке O так, что $AO = OB$, $AC||DB$. Докажите, что $\triangle AOC = \triangle OB$.

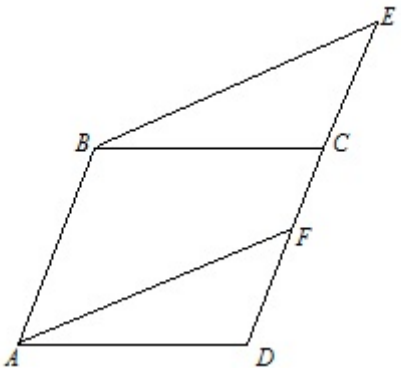
Упражнение 12.

На рисунке $AB = BD = BC, BE||DC$. Докажите, что $DC \perp AC$.



Упражнение 13

На рисунке $BE||AF, AB||DE, AB = CD$. Докажите, что $\triangle BCE = \triangle ADF$.

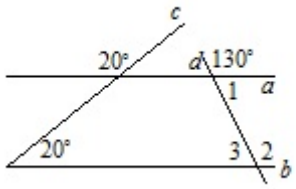


Упражнение 14

На прямой MN между точками M и N выбрана точка A и проведены по одну сторону от MN лучи AB, AC и AD. На луче AB выбрана точка K и через нее проведена прямая, параллельная MN и пересекающая лучи AC и AD соответственно в точках P и E, $KP = PA = PE$. Докажите, что $AB \perp AD$.

Упражнение 15

Используя данные на рисунке, найдите углы 1, 2 и 3.



Упражнение 16

На рис.12 $A_1B_1 || AB, A_1K_1$ - биссектриса угла $\angle MA_1B_1, AK$ - биссектриса угла $\angle MAB$. Докажите, что угол $\angle MA_1K_1$ равен углу $\angle MAK$. Могут ли пересекаться прямые A_1K_1 и AK?

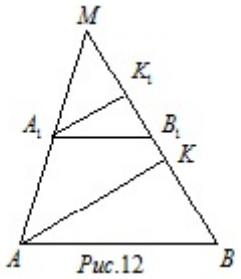
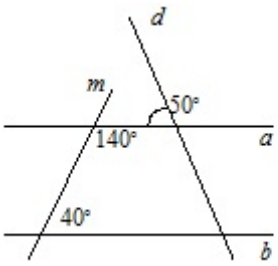


Рис.12

Упражнение 17

Один из углов, образованных при пересечении прямой d прямыми a и b, равен 50◦ (см. рисунок). Может ли один из остальных семи углов равняться 20◦? Почему?



Упражнение 18

На рис.14 $BA||DE$. Докажите, что угол $\angle BCD$ равен сумме углов $\angle B$ и $\angle D$.

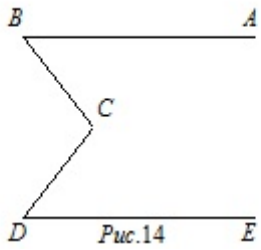


Рис.14

Упражнение 19

На рис.15 угол $\angle BED$ равен 70°, угол $\angle EDC$ равен 20°, $AB||CD$. Найдите угол $\angle ABC$.

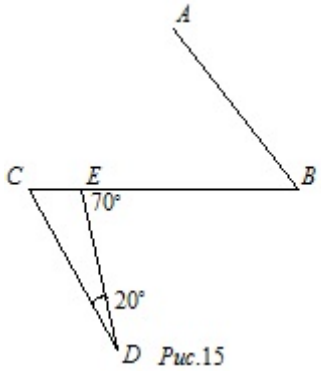


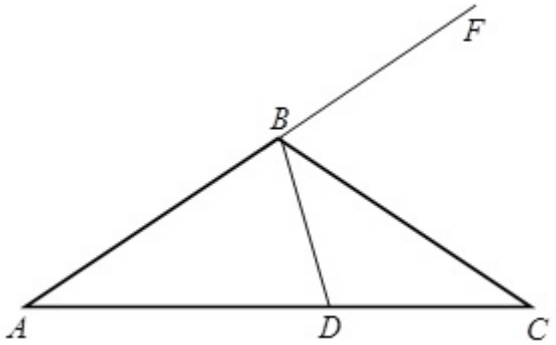
Рис.15

Упражнение 20

Внутри треугольника $\triangle ABC$ отмечена точка F. Через нее проведены прямые, параллельные сторонам AB и AC и пересекающие сторону BC соответственно в точках M и E, $FM = BM$, $FE = CE$. Докажите, что F - точка пересечения биссектрис треугольника $\triangle ABC$.

Упражнение 21

На рисунке BD - медиана треугольника $\triangle ABC$, причем $AB = 2BD$. Докажите, что BC - биссектриса угла $\angle DBF$.



Задачи и упражнения

1. На рис.1 $AB = BC$, угол $\angle A$ равен 30°, угол $\angle DCE$ в 5 раз меньше угла $\angle BCE$. Докажите, что $AB||CD$.

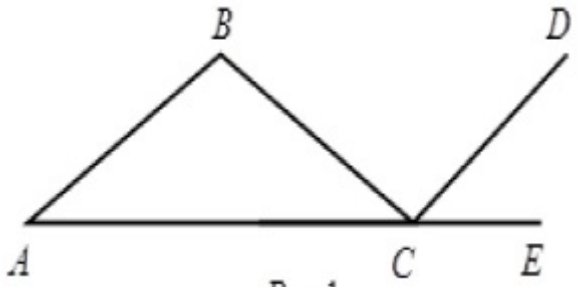


Рис.1

2. Отрезки BD и AC пересекаются в точке O так, что $AO = OC$ и $BO = OD$. Докажите, что $DC||AD$.

3. На рис.2 углы 1 и 2 равны, $ED = BC, EF = AC$. Докажите, что $EF||AC$.

4. На рис.3 AC-биссектриса угла $\angle BAD, BE \perp AC$ и $AE = EC$. Докажите, что $AD||BC$.

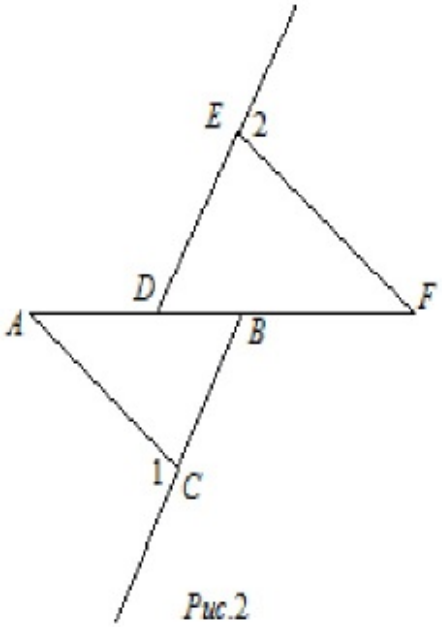


Рис.2

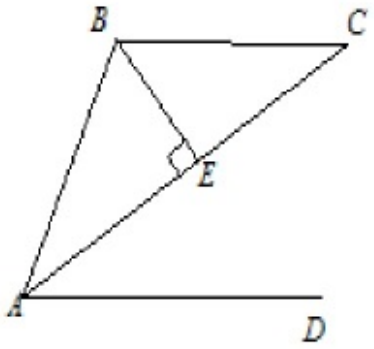


Рис.3

5. На рис.4 $AB||CD$ и $AC = AB$, угол $\angle BCD$ равен 20°. Найдите угол $\angle CAB$.

6. На рис.5 $BC = AD, BC||AD$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle ADC$

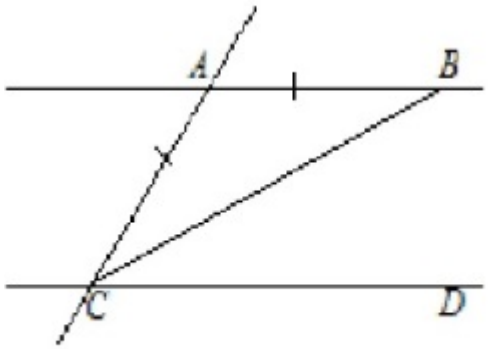


Рис.4

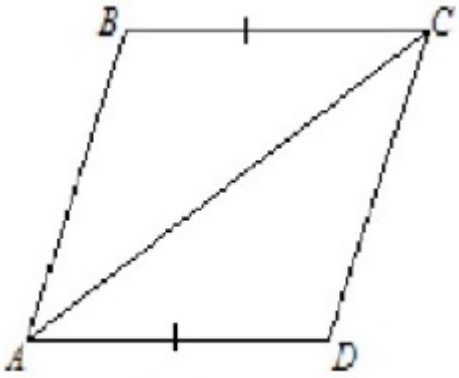


Рис.5

7. На рис.6 $AB = AC, AD + DE, DE||AC$. Докажите, что $AE \perp BC$.

8. На рис.7 $AB||CD, BC||AD, DF||BE$. Докажите, что $\triangle FAD = \triangle CBE$.

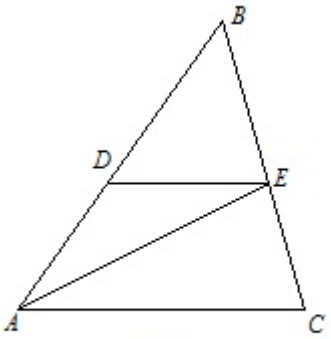


Рис.6

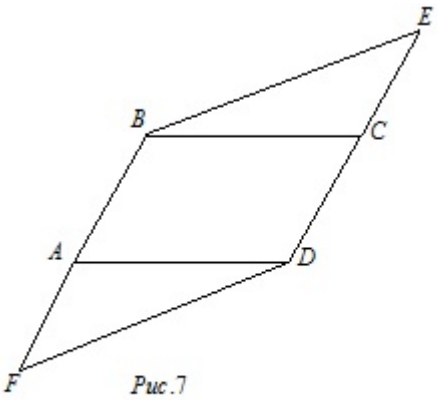


Рис.7

9. Может ли еще один из семи остальных углов, образованных при пересечении прямых a и b прямой d (рис.8), быть равен 100°? Равен 60°? Почему?

10. На рис.9 $BA||DE$, угол $\angle CBA$ равен 140°, угол $\angle CDE$ равен 130°. Докажите, что $BC \perp CD$.

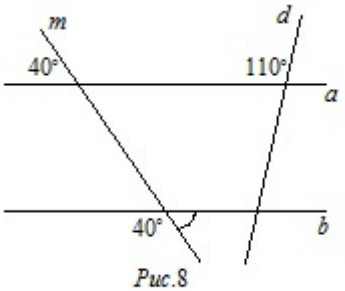


Рис.8

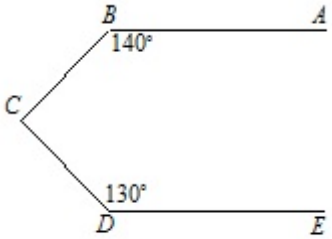


Рис.9

11. На рис.10 $AB||CD$, угол $\angle ABC = 30^\circ$, угол $\angle CDE = 40^\circ$. Найдите угол $\angle BED$.

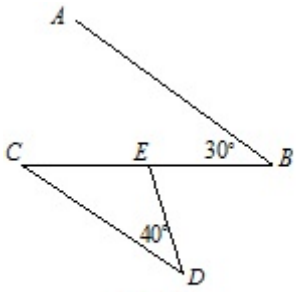


Рис.10

12. Внутри треугольника $\triangle ABC$ выбрана точка M. Через нее проведена прямая, параллельная AC и пересекающая стороны AB и BC соответственно в точках D и E, причем $MD = AD$ и $ME = EC$. Докажите, что M- точка пересечения биссектрис треугольника.

13. На рис.11 AC- биссектриса угла $\angle BAM$, $AD = CE$, $BE = BD$, угол $\angle BDA$ равен углу $\angle BEC$. Докажите, что $AM||BC$.

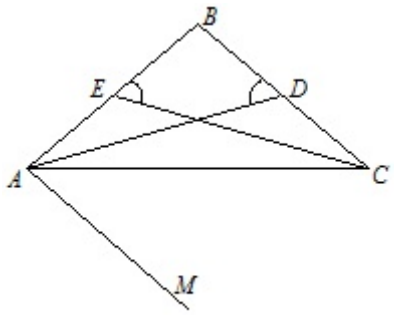


Рис.11

14. На отрезке AB взята точка C. Через точки A и B проведены по одну сторону от AB параллельные лучи. На них отложены отрезки $AD = AC$ и $BE = BC$. Точка C соединена отрезками с точками D и E. Докажите, что $DC \perp CE$.

15. На рис.12 $AB = BC$, $AO = OD$ и $BO = OC$. Докажите, что BD- биссектриса угла $\angle EBC$.

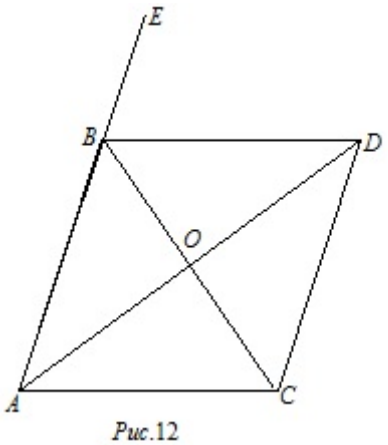


Рис.12

16. Два равных тупых угла имеют общую сторону, а две другие стороны взаимно перпендикулярны. Найдите величину тупого угла.

17. Из вершины развернутого угла проведены два луча, которые делят его на три равные части. Покажите, что биссектриса среднего угла перпендикулярна сторонам развернутого угла.

18. Докажите, что сумма каждых пяти углов, не прилежащих один к другому и образуемых пятью прямыми, проходящими через одну точку, равна двум прямым углам.