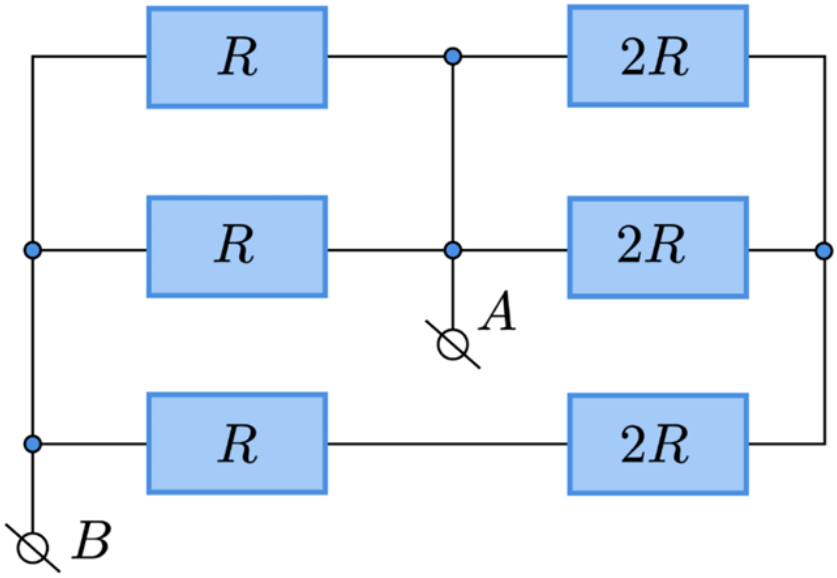
Задачи на цепи

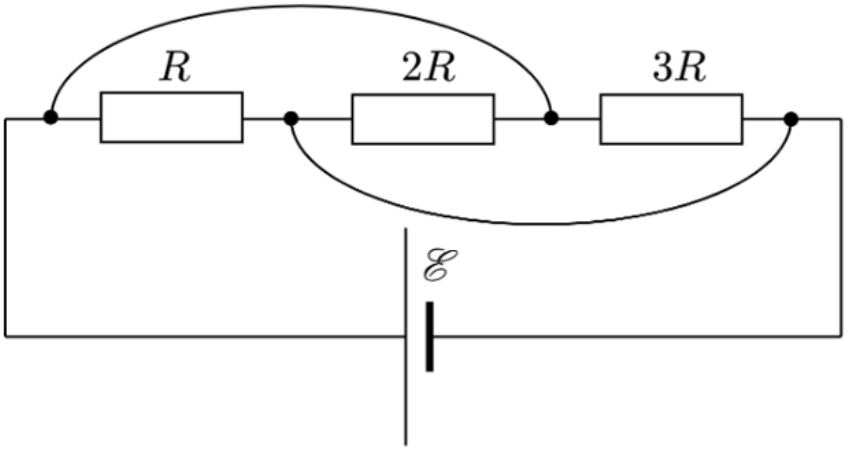
Преподаватель: Сорокина Василиса Ивановна

Задачи

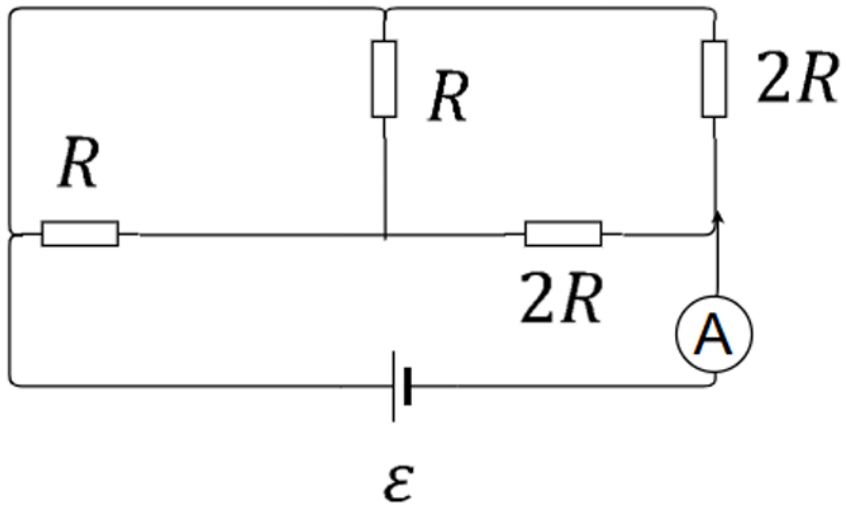
Задача 1. Нарисуйте эквивалентную схему для участка цепи между контактами A и B.



Задача 2. Определить величины токов, протекающих через каждый из резисторов. Источник считать идеальным.



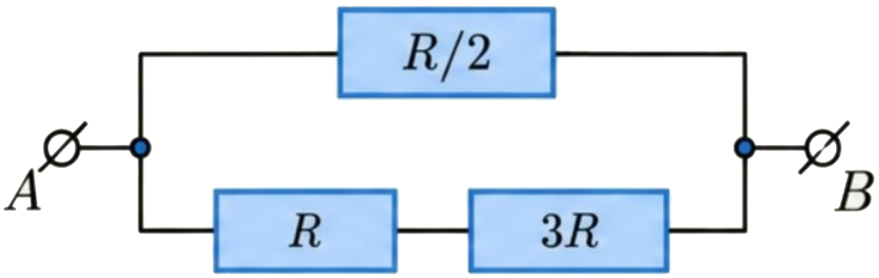
Задача 3. Найти сопротивление R. Напряжение источника: $\varepsilon = 6$ В. Показание амперметра: $I_0 = 9$ мА. Источник и амперметр считать идеальными.



Решения

Задача 1. **Условие.** Нарисуйте эквивалентную схему для участка цепи между контактами A и B.

Решение.



Задача 2. **Условие.** Определить величины токов, протекающих через каждый из резисторов. Источник считать идеальным.

Решение. 1. Анализ схемы методом узловых потенциалов.

Обозначим узлы цепи слева направо:

- Узел 1: вывод цепи слева от первого резистора R;
- Узел 2: точка соединения резистора R и резистора $2R$;
- Узел 3: точка соединения резистора $2R$ и резистора $3R$;
- Узел 4: вывод цепи справа от резистора $3R$.

Проследим за соединительными перемычками цепи:

▶ Верхняя перемычка напрямую соединяет Узел 1 и Узел 3. Поскольку сопротивление соединительных проводов равно нулю, потенциалы этих узлов строго одинаковы:

$$\varphi_1 = \varphi_3.$$

К этой же группе узлов подключён положительный полюс идеального источника. Примем опорный потенциал отрицательного полюса источника за ноль ($\varphi_- = 0$). Тогда:

$$\varphi_1 = \varphi_3 = \mathcal{E}.$$

▶ Нижняя перемычка напрямую соединяет Узел 2 и Узел 4. К этой же линии подключён отрицательный полюс источника:

$$\varphi_2 = \varphi_4 = 0.$$

2. Напряжения и токи на каждом резисторе.

Определим разность потенциалов на выводах каждого из трёх резисторов:

1. Резистор R (включён между узлами 1 и 2):

$$U_R = \varphi_1 - \varphi_2 = \mathcal{E} - 0 = \mathcal{E}.$$

По закону Ома для участка цепи ток через резистор R:

$$I_R = \frac{U_R}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Направление тока: от узла 1 к узлу 2 (слева направо).

2. Резистор $2R$ (включён между узлами 2 и 3):

$$U_{2R} = \varphi_3 - \varphi_2 = \mathcal{E} - 0 = \mathcal{E}.$$

Ток через резистор $2R$:

$$I_{2R} = \frac{U_{2R}}{2R} = \frac{\mathcal{E}}{2R}.$$

Направление тока: от узла 3 к узлу 2 (справа налево).

3. Резистор $3R$ (включён между узлами 3 и 4):

$$U_{3R} = \varphi_3 - \varphi_4 = \mathcal{E} - 0 = \mathcal{E}.$$

Ток через резистор $3R$:

$$I_{3R} = \frac{U_{3R}}{3R} = \frac{\mathcal{E}}{3R}.$$

Направление тока: от узла 3 к узлу 4 (слева направо).

Таким образом, все три резистора соединены параллельно и подключены к одному и тому же напряжению $\mathcal{E}$.

3. Дополнительный расчёт токов в перемычках и источника.

Для полного понимания картины распределения токов применим первое правило Кирхгофа к узлам схемы:

– Полный ток, отдаваемый источником:

$$I_{\text{общ}} = I_R + I_{2R} + I_{3R} = \frac{\mathcal{E}}{R} + \frac{\mathcal{E}}{2R} + \frac{\mathcal{E}}{3R} = \mathcal{E}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{6}\frac{\mathcal{E}}{R}.$$

– Эквивалентное сопротивление всей цепи:

$$R_{\text{экв}} = \frac{\mathcal{E}}{I_{\text{общ}}} = \frac{6}{11}R.$$

– Ток в верхней перемычке (от узла 3 к узлу 1): в узел 1 ток может прийти только через верхнюю дуговую перемычку, после чего он полностью уходит в резистор R:

$$I_{\text{верх}} = I_R = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

– Ток в нижней перемычке (от узла 2 к узлу 4): в узел 2 сходятся токи I_R (слева) и I_{2R} (справа). Суммарный ток уходит по нижней перемычке к узлу 4:

$$I_{\text{нижн}} = I_R + I_{2R} = \frac{\mathcal{E}}{R} + \frac{\mathcal{E}}{2R} = \frac{3\mathcal{E}}{2R}.$$

Ответ: все три резистора подключены параллельно источнику $\mathcal{E}$. Величины токов равны:

$$I_R = \frac{\mathcal{E}}{R}, \quad I_{2R} = \frac{\mathcal{E}}{2R} = 0{,}5\frac{\mathcal{E}}{R}, \quad I_{3R} = \frac{\mathcal{E}}{3R} \approx 0{,}33\frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Задача 3. Условие. Найти сопротивление R. Напряжение источника: $\varepsilon = 6$ В. Показание амперметра: $I_0 = 9$ мА. Источник и амперметр считать идеальными.

Решение. 1. Анализ схемы и эквивалентные преобразования.

Поскольку измерительный прибор и источник идеальные:

- Внутреннее сопротивление идеального источника $r = 0$;
- Внутреннее сопротивление идеального амперметра $R_A = 0$.

Примем потенциал отрицательного полюса источника за ноль: $\varphi_- = 0$. Тогда потенциал положительного полюса: $\varphi_+ = \varepsilon = 6$ В.

1. Определение потенциалов проводников:

– От положительного полюса провод идёт влево и вверх, формируя единую шину высокого потенциала $\varphi_{\text{верх}} = \varepsilon$. К ней подключены:

- левый вывод горизонтального резистора R;
- верхний вывод вертикального резистора R;
- верхний вывод вертикального резистора $2R$.

– От отрицательного полюса провод идёт вправо и вверх через идеальный амперметр ($R_A = 0$). Следовательно, точка соединения над амперметром (обозначим её N) имеет нулевой потенциал:

$$\varphi_N = 0.$$

К узлу N подключены:

- нижний вывод вертикального резистора $2R$;
- правый вывод горизонтального резистора $2R$;
- вход амперметра.

2. Ток через вертикальный резистор $2R$: верхний вывод этого резистора находится под потенциалом ε, а нижний — под потенциалом 0 (непосредственно перед амперметром). Напряжение на нём равно ε, а протекающий ток:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{2R}.$$

3. Анализ промежуточного узла M: обозначим узел между горизонтальным R, вертикальным R и горизонтальным $2R$ буквой M.

– Горизонтальный резистор R включён между шиной ε и узлом M; – Вертикальный резистор R также включён между шиной ε и узлом M.

Следовательно, эти два резистора соединены параллельно! Их эквивалентное сопротивление:

$$R_{\parallel} = R \parallel R = \frac{R}{2} = 0{,}5R.$$

4. Ток через горизонтальный резистор $2R$: блок из двух параллельных резисторов R соединён последовательно с горизонтальным резистором $2R$. Эта ветвь включена между шиной ε и узлом N ($\varphi_N = 0$). Полное сопротивление ветви:

$$R_{\text{ветви}} = R_{\parallel} + 2R = 0{,}5R + 2R = 2{,}5R = \frac{5}{2}R.$$

Ток, текущий по этой ветви в узел N:

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R_{\text{ветви}}} = \frac{\varepsilon}{\frac{5}{2}R} = \frac{2\varepsilon}{5R}.$$

2. Показание амперметра и расчёт сопротивления R.

В узел N входят два тока:

1. Ток I_1 от вертикального резистора $2R$;
2. Ток I_2 от горизонтального резистора $2R$.

По первому правилу Кирхгофа весь этот суммарный ток уходит через амперметр к источнику:

$$I_0 = I_1 + I_2 = \frac{\varepsilon}{2R} + \frac{2\varepsilon}{5R}.$$

Приведём слагаемые к общему знаменателю $10R$:

$$I_0 = \varepsilon\left(\frac{5}{10R} + \frac{4}{10R}\right) = \frac{9\varepsilon}{10R}.$$

Выразим искомое сопротивление R:

$$R = \frac{9\varepsilon}{10I_0}.$$

3. Подстановка численных значений.

Дано:

$$\mathcal{E} = 6 \text{ В}, \quad I_0 = 9 \text{ мА} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ А}.$$

Подставляем величины:

$$R = \frac{9 \cdot 6 \text{ В}}{10 \cdot 9 \cdot 10^{-3} \text{ А}} = \frac{54}{9 \cdot 10^{-2}} = \frac{6}{10^{-2}} = 600 \text{ Ом}.$$

4. Проверка размерности и баланса токов.

– Размерность: $[R] = \text{В}/\text{А} = \text{Ом}$ — формула однородна и физически корректна.

– Проверка токов при $R = 600$ Ом:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{2R} = \frac{6 \text{ В}}{1200 \text{ Ом}} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 5 \text{ мА};$$
$$I_2 = \frac{2\mathcal{E}}{5R} = \frac{12 \text{ В}}{3000 \text{ Ом}} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 4 \text{ мА};$$
$$I_0 = I_1 + I_2 = 5 \text{ мА} + 4 \text{ мА} = 9 \text{ мА}.$$

Значение полностью совпадает с показанием амперметра из условия задачи.

Ответ: сопротивление резистора

$$R = 600 \text{ Ом} = 0{,}6 \text{ кОм}.$$